CLASES ILUSTRADAS

Mecánica Vectorial

en 4 periodos

APOYO A LA DOCENCIA

Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

CLASES ILUSTRADAS

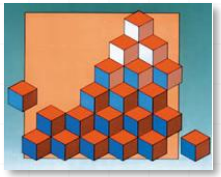
Mecánica Vectorial

Lineamientos Generales

Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

Objetivos de la Lección



Al terminar esta lección el alumno será capaz de:

- *Enunciar los Objetivos Generales del Curso.*
- *Listar los Temas del Curso.*
- *Explicar la importancia de trabajar con un Esquema Cognoscitivo.*
- *Distinguir los diferentes Criterios de Evaluación.*
- *Identificar aspectos básicos para el aprovechamiento del curso.*
- *Reconocer las fechas importantes del Calendario de Actividades .*

Mecánica Vectorial

CLAVE DEL CURSO: 0228.
MODALIDAD: Curso Intersemestral.
SEGUNDO SEMESTRE CARÁCTER: Obligatorio.
CRÉDITOS: 12.
REQUISITOS: Física Contemporánea, Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica I.

Objetivos Generales

Iniciar al estudiante en el conocimiento de la mecánica clásica, empleando una herramienta matemática de mayor profundidad y formalismo. Enseñar los principios básicos en los que se fundamenta la física, tales como las leyes de conservación y su utilización.

Contenido

HORAS POR CLASE TEÓRICAS: 4.8
HORAS POR SEMANA TEÓRICAS: 24
HORAS POR SEMESTRE TEÓRICAS: 96

1. INTRODUCCIÓN 2 hrs.

1.1 El objeto de estudio de la mecánica.
1.2 Las variables básicas de descripción en la mecánica. Sistemas de unidades.
1.3 Medición de distancias pequeñas, medianas y grandes; medición de ángulos; medición de tiempos y masas.
1.4 Características generales de los procedimientos de medición; precisión, exactitud e incertidumbre experimental.

2. VECTORES 4 hrs.

2.1 Álgebra vectorial.
2.2 Los vectores como lenguaje de la mecánica.

3. CINEMÁTICA 12 hrs.

3.1 Movimiento rectilíneo: velocidad y aceleración.
3.2 Representación vectorial de la velocidad y la aceleración en movimiento rectilíneo.
3.3 Movimiento curvilíneo: velocidad y aceleración.
3.4 Movimiento bajo aceleración constante.
3.5 Componentes tangenciales y normales de la aceleración.
3.6 Movimiento circular: aceleración angular.
3.7 Movimiento curvilíneo general.

4. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA 14 hrs.

4.1 La ley de la inercia. Primera ley de Newton.
4.2 Principio de conservación del momento lineal.
4.3 Segunda y tercera leyes de Newton: concepto de fuerza.
4.4 Fricción.
4.5 Sistemas de masa variable.
4.6 Momento angular y torca.
4.7 Fuerzas centrales.

5. RELATIVIDAD GALILEANA 12 hrs.

5.1 Velocidad relativa.
5.2 Movimiento traslacional relativo uniforme.
5.3 Movimiento rotacional relativo uniforme.
5.4 Movimiento relativo a la Tierra.

6. TRABAJO Y ENERGÍA 14 hrs.

6.1 Trabajo.
6.2 Potencia.
6.3 Energía cinética.
6.4 Trabajo de una fuerza constante en magnitud y dirección.
6.5 Energía potencial, concepto de potencial.
6.6 Conservación de energía de una partícula.
6.7 Conservación en el trabajo mecánico.
6.10 Movimiento bajo fuerzas conservativas.
6.11 Fuerzas no conservativas, disipación de energía.

7. DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS 12 hrs.

7.1 Definiciones de masa total, momento total y centro de masa.
7.2 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas.
7.3 Masa reducida.
7.4 Momento angular de un sistema de partículas.
7.5 Energía cinética de un sistema de partículas.
7.6 Conservación de energía de un sistema de partículas.

8. DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO 10 hrs.

8.1 Momento angular de un cuerpo rígido.
8.2 Cálculo del momento de inercia.
8.3 Ecuación de movimiento para la rotación de un cuerpo rígido.
8.4 Energía cinética de rotación.
8.5 Movimiento giroscópico (revisión somera).

9. MOVIMIENTO OSCILATORIO 8 hrs.

9.1 Cinemática y dinámica del oscilador armónico simple.
9.2 Péndulos simple y compuesto.
9.3 Superposición de dos movimientos armónicos simples (coherencia e incoherencia).

10. INTERACCIÓN GRAVITATORIA 10 hrs.

10.1 Gravedad.
10.2 La ley gravitacional de Newton.
10.3 Fuerza gravitacional de una masa esférica.
10.4 Masas inercial y gravitacional.
10.5 Energía potencial gravitacional.
10.6 Movimiento general bajo la fuerza gravitacional.
10.7 Leyes de Kepler.
10.8 Principio de equivalencia.

Fuentes de Consulta

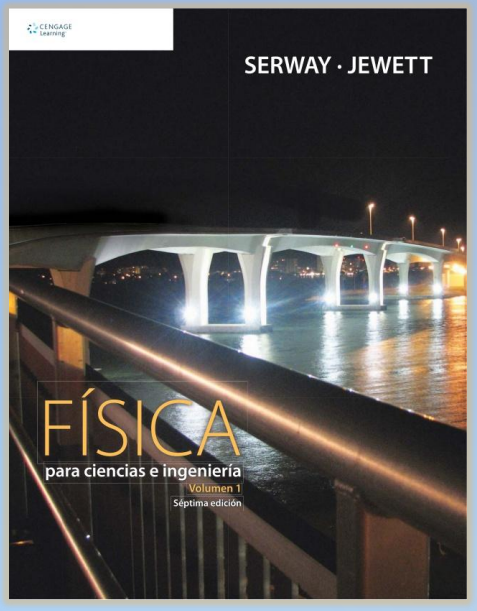
Bibliografía básica

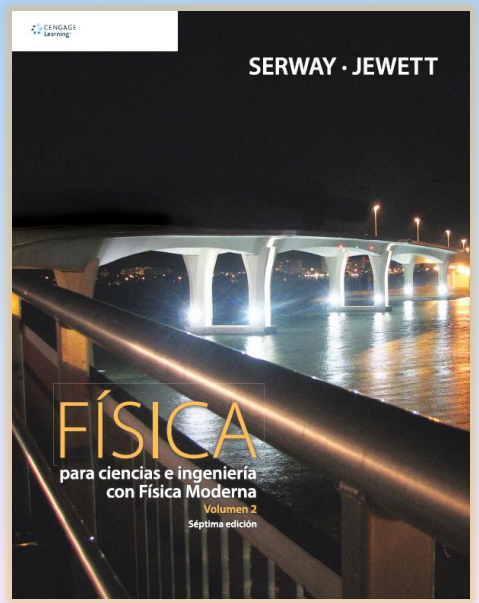
- Alonso, M., Finn, J.E., **Física**, Addison Wesley Iberoamericana, México, (1999).
- Douglas Giancoli, **Physics for Scientists & Engineers**, 3rd edition, Prentice Hall, (2000).
- Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., **Fundamentals of physics**, 5th edition, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., USA, (1997).
- Kittel, Ch, Knight, W. D., and Ruderman, M. A., **Mecánica, Berkeley physics course, Volumen 1**, Reverté, (1989).
- Ohanian, H.C. y J.T. Markert, **Física para ingeniería y ciencias**, **Vol. 1.** Mc Graw Hill-Interamericana, 3ª edición. México, (2009).
- *Serway, R. A. y J. W. Jewett, Jr., **Física (Volúmenes I y II).** 7ª edición, Thompson
- Complementaria, México, (2005).

Bibliografía complementaria

- French, A.P., **Newtonian Mechanics** (M.I.T. Introductory Physics Series), W.W. Norton & Co., (1971).
- Feynman, Richard P., Leighton, R. B. and Sands, M., **The Feynman Lectures on Physics, Volume I: Mechanics, Radiation, and Heat**, (1964).

Lecturas Recomendadas





Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos.

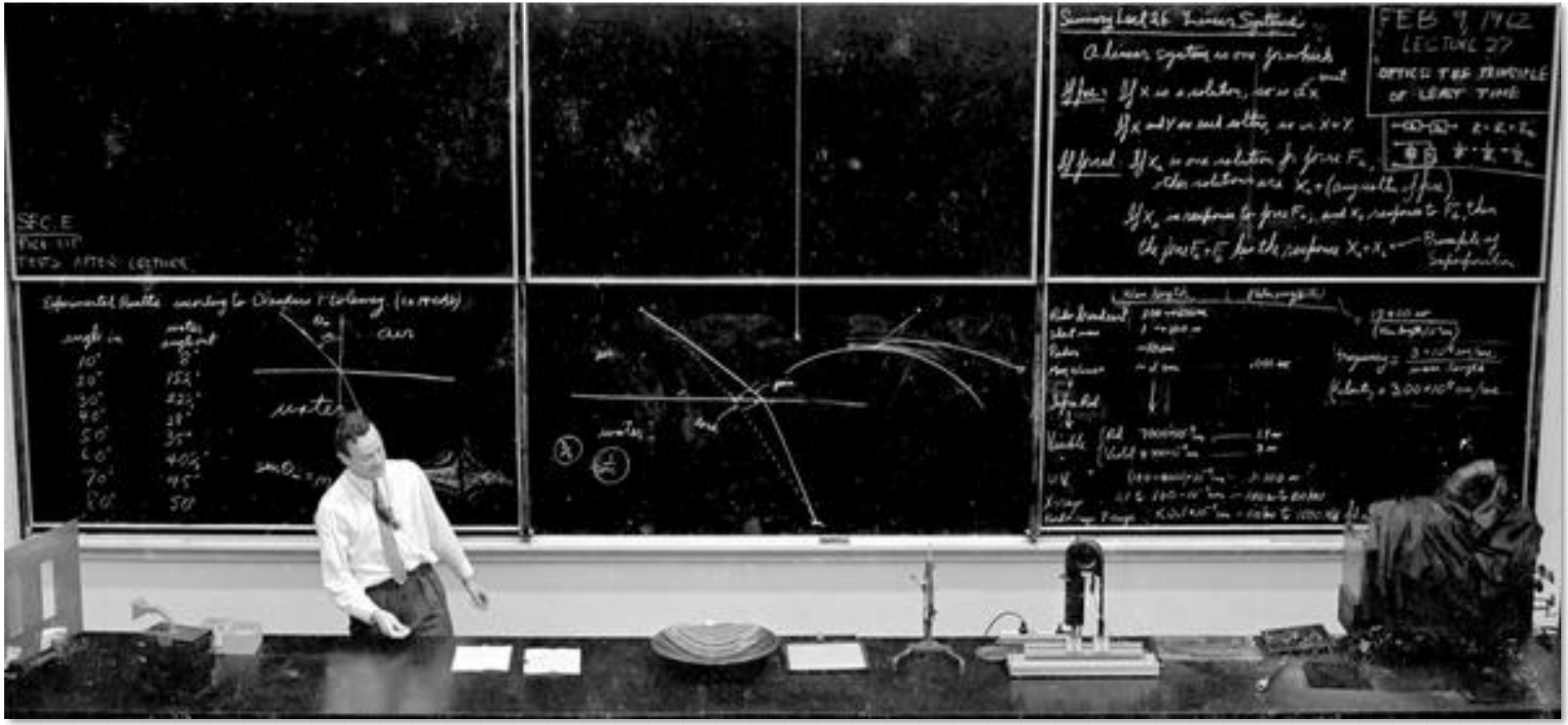
El libro seleccionado para un curso debe ser la principal guía del estudiante para entender y aprender la materia de estudio.

Además, el libro debe tener un estilo accesible y estar escrito para facilitar la enseñanza y el aprendizaje.

Raymond A. Serway
St. Petersburg, Florida

John W. Jewett, Jr.
Pomona, California

Serway R.A. et al. (2009). Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna. Vols. I y II. Séptima edición. Cenage Learning.

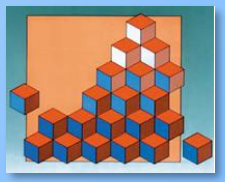


"No sabes nada hasta que lo has practicado"

R. P. Feynman

El cono del aprendizaje
de Edgar Dale

Técnica de Enseñanza



Partiendo de los objetivos generales del curso, todos los temas se desarrollan con base en el siguiente esquema didáctico:

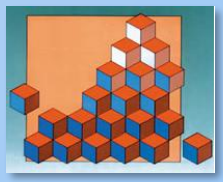
- *Explicación de conceptos relacionados con la materia a estudiar.*
- *Ejemplos sobre las implicaciones de los conceptos y su importancia.*
- *Ejercicios con el uso de las técnicas físico-matemáticas para aplicar los diferentes conceptos a la resolución de problemas particulares.*
- *Tareas (para realizar en casa) para que el estudiante pueda poner en práctica lo aprendido durante las exposiciones de los temas en clase.*
- *Exámenes para que el estudiante consolide el estudio y verifique las habilidades adquiridas en las clases.*

Además, en cada clase, se presentará el desglose de objetivos particulares de cada lección y los índices de contenido correspondientes.

Los temas se desarrollarán como compendios de conceptos y procedimientos físico-matemáticos interrelacionados de modo tal, que expliquen y enseñen la manera de resolver problemas concretos con aplicación directa en las ciencias e ingeniería.

Esta técnica de enseñanza pretende promover en el alumno un dominio consecutivo de habilidades específicas y concretas de manera sistemática, basada en la ejercitación de la aplicación de los conceptos mediante el uso de las herramientas de resolución de problemas en actividades dirigidas.

Esquema Cognoscitivo

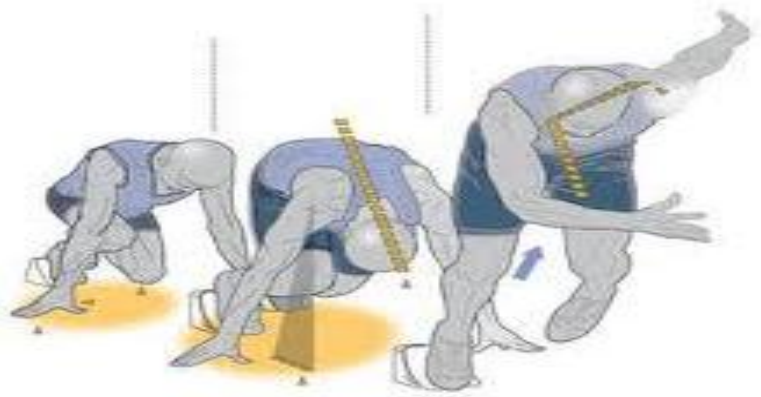


La manera en que se pretende lograr el aprendizaje y dominio de los temas del curso por parte de los alumnos es desarrollando en cada exposición el siguiente esquema cognoscitivo:

- ***Incentivación:*** *Es importante antes que nada desarrollar un interés por los temas a estudiar.*
- ***Información:*** *El alumno deberá ser informado de que lo que va estudiar, su importancia y utilidad.*
- ***Comprensión:*** *El entendimiento de los conceptos de cada tema debe verificarse para garantizar el avance progresivo en la materia.*
- ***Aplicación:*** *Resulta indispensable para fijar los conocimientos aprendidos el realizar las tareas correspondientes a cada tema aplicando las técnicas de resolución de problemas .*
- ***Análisis:*** *Se promoverá en el alumno la capacidad de ahondar en los conocimientos del curso mediante la realización de un trabajo de investigación que le permita conocer la manera en que los temas estudiados se interrelacionan con aplicaciones concretas de la ciencia e ingeniería.*
- ***Síntesis:*** *Se fomentará en el alumno la capacidad de generar aportaciones a los temas estudiados mediante un proyecto aplicativo integrador.*
- ***Trabajo en Grupo:*** *Se propiciará que el alumno trabaje en equipo para que fortalezca sus capacidades de comunicación, organización, cooperación y liderazgo.*

Criterios de Evaluación

MODALIDAD DE EVALUACIÓN	PORCENTAJE DE LA CALIFICACIÓN
Primer Examen Parcial	15 %
Segundo Examen Parcial	15 %
Tercer Examen Parcial	15 %
Cuarto Examen Parcial	15%
Tareas (4)	40%



Puntos para el Estudiante

1. **Asistir a clase puntualmente:** con un 20 % de faltas se pierde el derecho examen. Llegar tarde o ausentarse de la clase más de 15 minutos se toma como falta.

2. **Poner toda la atención posible en clase:** queda estrictamente prohibido llamar por teléfono, enviar continuos mensajes de texto, chatear y hacer búsquedas en internet que no estén solicitadas por el profesor durante la clase. Si el alumno desea atender alguna comunicación deberá hacerlo fuera del salón.

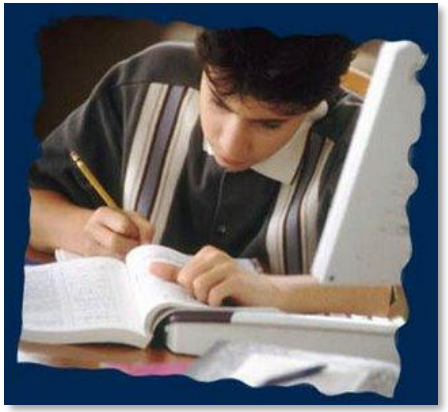
3. **Tomar notas detalladas de clase:** La física conviene escribirse.

4. **Hacer preguntas objetivas:** para comprender mejor la exposición de los conceptos.

5. **Tareas:**

   - Iniciar la tarea el día que se dejó, comenzando con la lectura de cada uno de los problemas.
   - Dedicar al menos una hora de trabajo (cuando así se requiera) por cada problema de las tareas.
   - Traer preguntas relacionadas con la tarea la siguiente clase.
   - Deben realizarse lo más limpio y claro que sea posible, de preferencia en computadora.
   - Después de la fecha de entrega no se aceptarán las tareas.

Reglamento de Tareas



1. **Las tareas solo se reciben el día indicado.**
2. **No existen los trabajos extra para subir calificación.**
3. **No se pueden utilizar hojas recicladas para entregar las tareas (deben reciclarse después para el trabajo en casa, borradores etc.)**
4. **Copiar una tarea (o que se demuestre que se sacó de Internet) se penaliza con su anulación.**
5. **Las hojas que se entreguen deben de estar libres de espiral, de otro modo, no se recibirán.**
6. **Las tareas deberán ser editadas en computadora.**

Reglamento de Exámenes

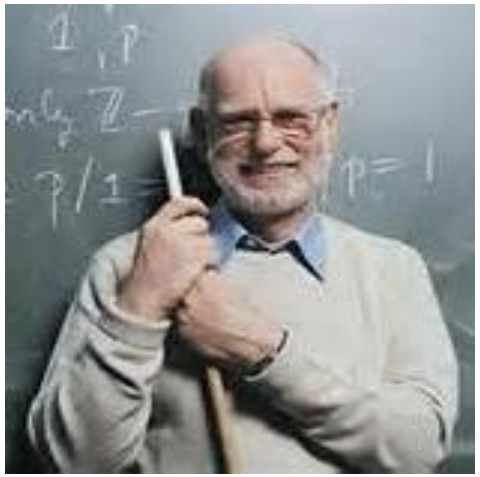
1. **No se permite el uso de formularios.**
2. **Cualquier pregunta debe de dirigirse al profesor.**
3. **Los resultados deben de marcarse claramente con pluma o con lápiz.**
4. **Para evitar confusión, todas las pertenencias de los alumnos que no se utilicen para resolver el examen permanecerán al frente del salón.**
5. **El examen se puede contestar en el orden que convenga al alumno, siempre y cuando este bien señalada cada respuesta.**
6. **Una vez iniciado un ejercicio, se recomienda resolver los incisos en orden, ya que estos están colocados en la secuencia adecuada para obtener un resultado.**
7. **Permitir que una persona copie o copiar se penaliza con la anulación del examen.**

La Responsabilidad de Estudiar

Afronta la realidad

Con frecuencia nos gusta criticar a los profesores cuando obtenemos malos resultados en la materia o malas calificaciones en los exámenes. Tienes que entender que el maestro sólo califica lo que tú pones en el examen, entonces, quien realmente se califica eres tú.

Es importante saber que **a ningún profesor le gusta reprobar a sus alumnos**, al contrario, esperan obtener buenos resultados de cada estudiante. Para un maestro el no poder ayudar a un estudiante a desarrollar sus potencialidades es muy frustrante y lo considera como un fracaso propio.



Enseñar no es tarea fácil, siempre hay profesores mejores que otros, pero debes recordar que la responsabilidad de estudiar es tuya y que ni los maestros ni nadie más tienen un control total sobre tus calificaciones.

La Responsabilidad de Estudiar

Pasos para asimilar y retener los contenidos

Ahora conocerás los cuatro pasos fundamentales para un estudio de calidad, conviértelos en algo habitual y automático en tu trabajo diario.

1. Forma una idea general del tema mediante una lectura rápida. Esta visión te servirá para conocer las ideas básicas: qué pretende el autor, qué te sugieren los subtítulos y qué conocimientos previos tienes sobre el tema.

2. Divide el tema en unidades menores: apartados, preguntas y párrafos. Busca la idea central de cada párrafo y plantea preguntas sobre ella. Subraya, haz esquemas y resúmenes.

3. Expresa las ideas principales de cada párrafo (mentalmente y por escrito) y relaciónalas. Hazlo sin ayuda del libro ni de los apuntes. Sintetiza las ideas y estructúralas por orden de importancia. Este tercer punto te sirve de autoevaluación.

4. Repasa lo estudiado en las clases anteriores. Evitarás posibles confusiones y realizarás un autoexamen de comprensión, asimilación y retención de contenidos básicos.

Esfuérzate a diario y verás que tendrás buenos resultados.

Es mejor el estudio individual, sobre todo en época de exámenes.

Calendario

Periodo	Fechas
1	
2	
3	
4	

Al final de la semana:

- **Se entrega la Tarea de la semana.**
- **Se califica la Tarea y Examen anterior.**
- **Se realiza el Examen de la semana.**

Periodo 1

MECÁNICA VECTORIAL

MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN Y VECTORES

Física + Matemáticas en Acción

Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

Contenido

DECLARATIVO

I. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.

1. Conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
2. Movimiento rectilíneo uniforme: aceleración en función del tiempo, la posición y la velocidad.
3. Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares; componentes tangencial y normal.
4. Movimiento relativo a un sistema de referencia de traslación.

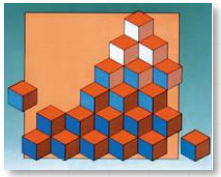
Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

Movimiento en una dimensión

Posición, velocidad y rapidez
Velocidad y rapidez instantánea
Modelos de análisis: La partícula bajo velocidad constante
Aceleración
Diagramas de movimiento
La partícula bajo aceleración constante
Objetos en caída libre
Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo
Estrategia General para Resolver Problemas

Objetivos de la Lección



Al terminar esta lección el alumno será capaz de:

- *Distinguir los conceptos de distancia, desplazamiento, velocidad y rapidez.*
- *Explicar los diagramas de análisis de movimiento.*
- *Reconocer las velocidades y aceleraciones promedio.*
- *Calcular velocidades y aceleraciones instantáneas.*
- *Resolver problemas relacionados con aceleraciones constantes.*

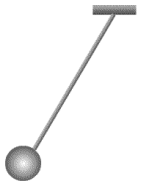
Movimiento

Como una primera etapa en el estudio de la mecánica clásica, se describe el movimiento de un objeto mientras se ignoran las interacciones con agentes externos que pueden causar o modificar dicho movimiento. Esta parte de la mecánica clásica se llama *cinemática*. (La palabra *cinemática* tiene la misma raíz que *cinema*. ¿Entiende por qué?)

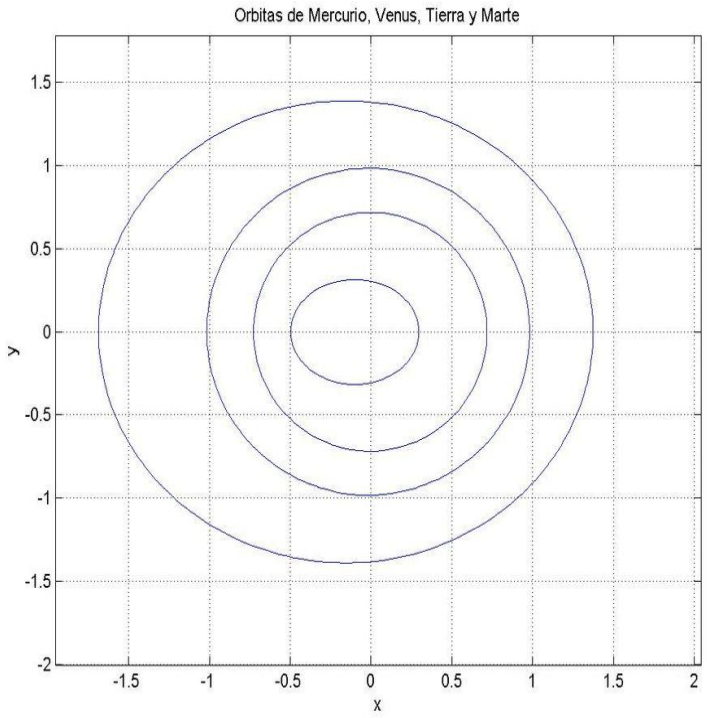
cinemática

Etimología: del griego antiguo *κινέιν* ("mover")

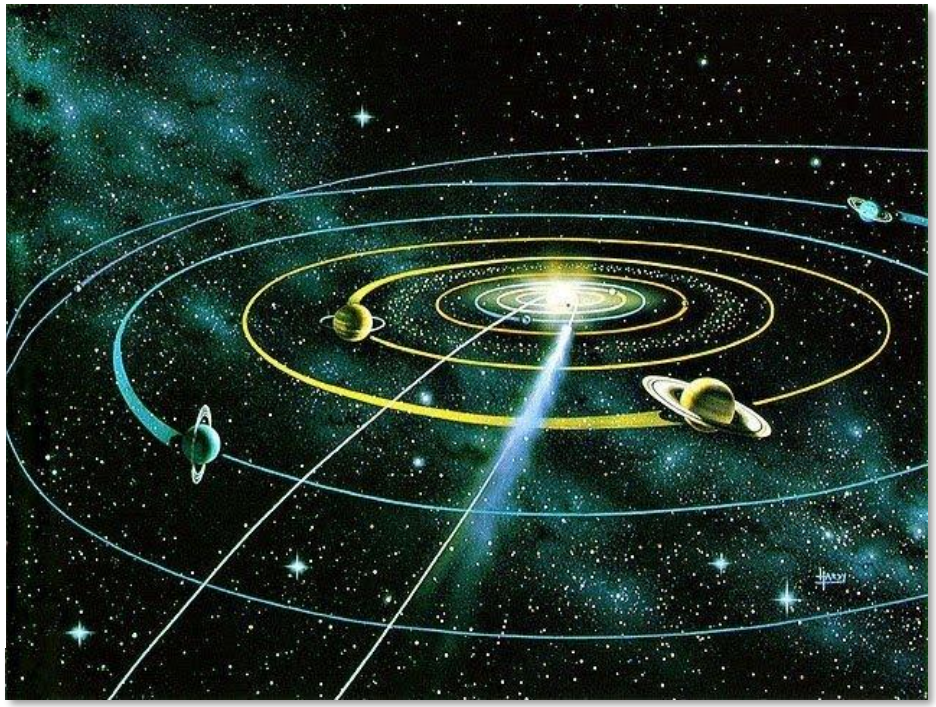
A partir de la experiencia cotidiana es claro que el movimiento de un objeto representa un cambio continuo en la posición de un objeto. En física se clasifica por categorías el movimiento en tres tipos: traslacional, rotacional y vibratorio. Un automóvil que viaja en una autopista es un ejemplo de movimiento traslacional, el giro de la Tierra sobre su eje es un ejemplo de movimiento rotacional, y el movimiento de ida y vuelta de un péndulo es un ejemplo de movimiento vibratorio.



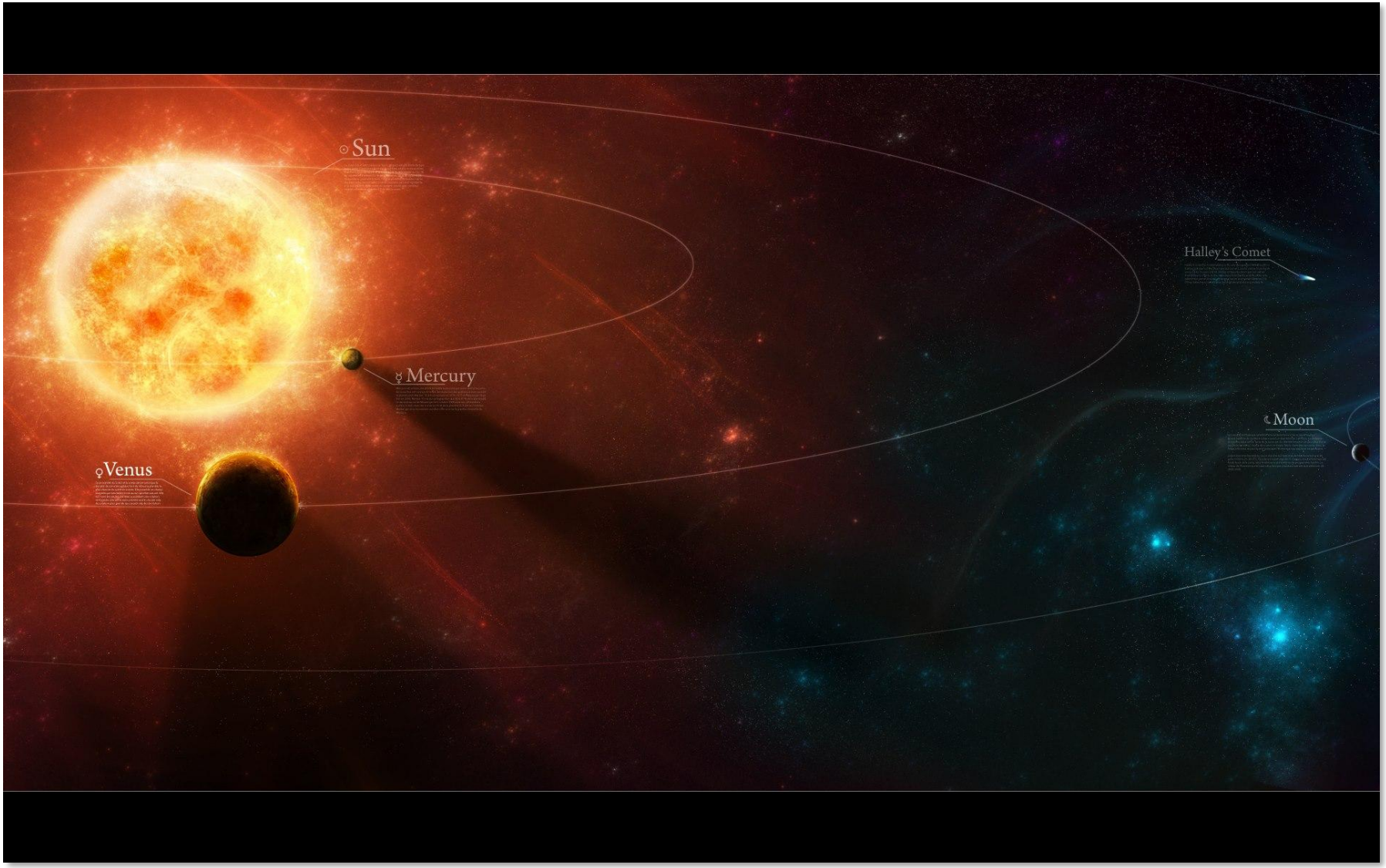
En el estudio del movimiento se usa el **modelo de partícula** y el objeto en movimiento se describe como una *partícula* sin importar su tamaño. En general, **una partícula es un objeto parecido a un punto, es decir: un objeto que tiene masa pero es de tamaño infinitesimal**. Por ejemplo, si quiere describir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, puede considerar a la Tierra como partícula y obtener datos razonablemente precisos acerca de su órbita.



En realidad la aproximación de partícula en estos casos es válida ya que las órbitas de los planetas y cometas son extremadamente grandes en comparación con las dimensiones de los objetos celestes.

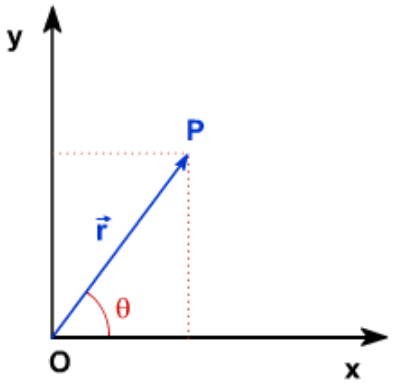


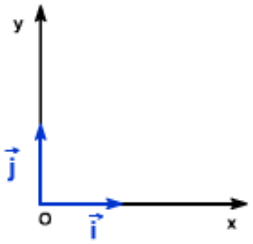
Ejercicio para hacer en clase: Si la distancia Tierra Sol es de 8 minutos luz en promedio y suponemos la órbita casi circular, ¿de que longitud es la órbita? Si ahora, el radio de la Tierra es de unos 6,300 km, ¿Cuántas veces cabe una circunferencia terrestre en la órbita?

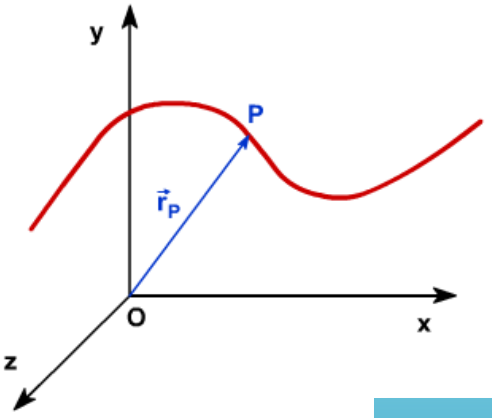


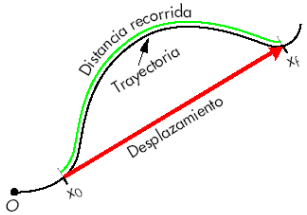
Posición, velocidad y rapidez

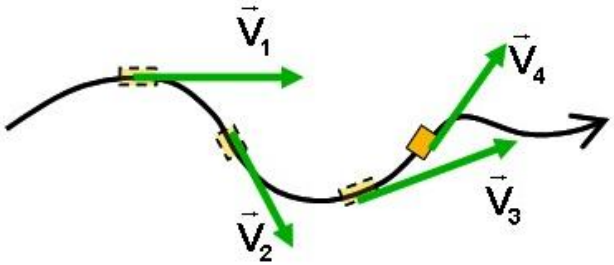
El movimiento de una partícula se conoce por completo si la posición de la partícula en el espacio se conoce en todo momento. La **posición** de una partícula es la ubicación de la partícula respecto a un punto de referencia elegido que se considera el origen de un sistema coordenado.











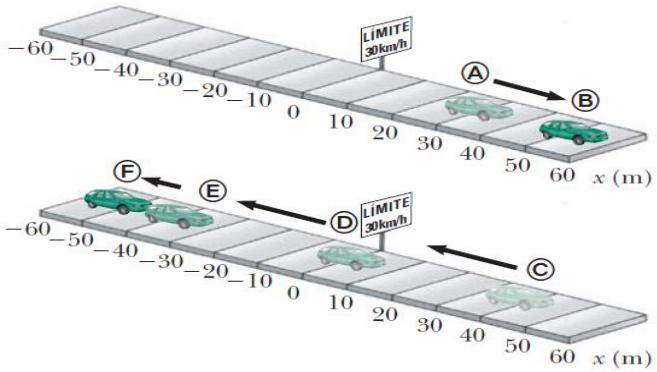
¿Velocímetro o Rapidímetro?

Movimiento en una dimensión

En las carreras de dragsters un conductor quiere una aceleración tan grande como sea posible. En una distancia de un cuarto de milla, un vehículo alcanza rapideces de más de 320 mi/h y cubre la distancia entera en menos de 5 s. (George Lepp/Stone/Getty)

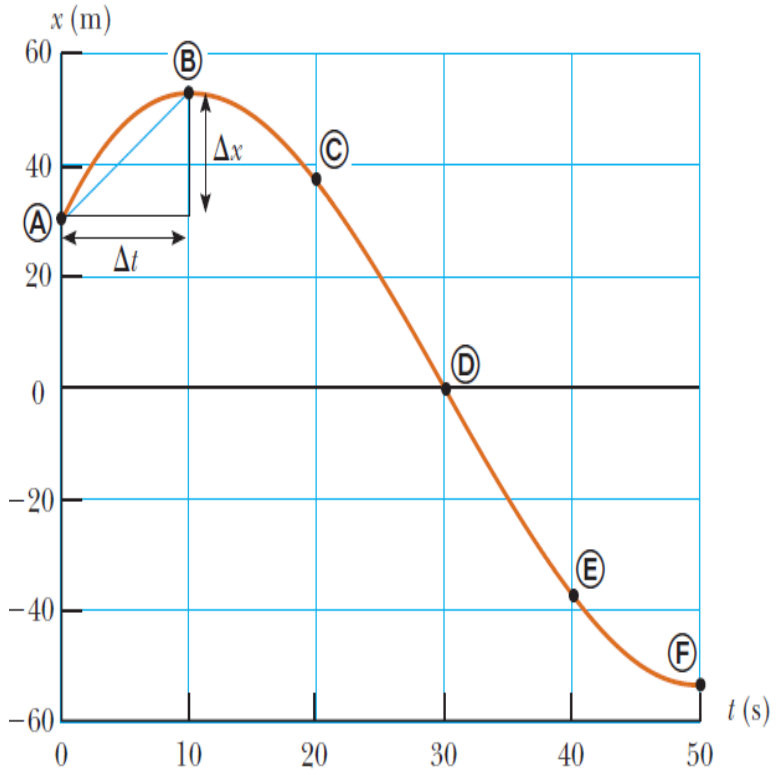
Movimiento en una dimensión

Un automóvil va hacia adelante y en reversa a lo largo de una línea recta.



Posición del automóvil en varios tiempos

Posición	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53



Representación gráfica (gráfica posición-tiempo) del movimiento del automóvil.

El **desplazamiento** se define como $\Delta x \equiv x_f - x_i$

Se usa la letra griega mayúscula delta (Δ) para denotar el *cambio* en una cantidad.

Es muy importante reconocer la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. **Distancia** es la longitud de una trayectoria seguida por una partícula.

Sí una atleta nada desde un punto de partida a lo largo de una piscina hasta el extremo opuesto y luego regresa al punto inicial, el desplazamiento de la competidora durante este intervalo de tiempo es cero.

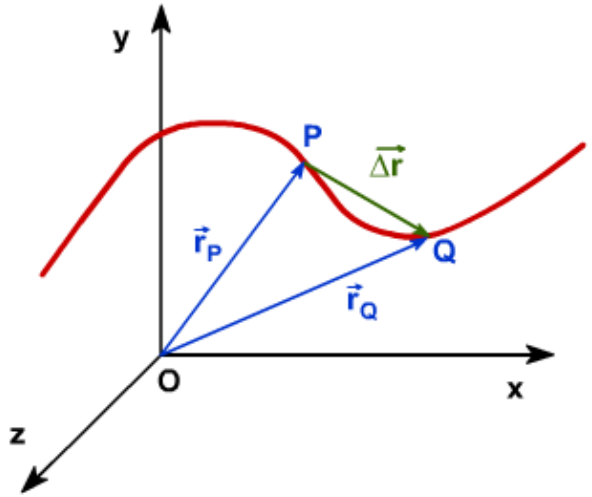
porque terminó en el mismo punto del que partió: $x_f = x_i$, de modo que $\Delta x = 0$. Sin embargo, durante este intervalo, se movió a lo largo de una *distancia* del doble de la longitud de la piscina. La **distancia** siempre se representa como un número positivo, mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo.

La velocidad promedio $v_{x,\,\text{prom}}$ se define como

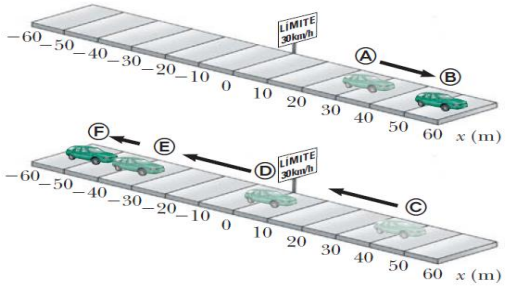
$$v_{x,\,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

el subíndice x indica movimiento a lo largo del eje x.

La velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión es positiva o negativa, dependiendo del signo del desplazamiento. (El intervalo de tiempo Δt siempre es positivo.) Si la coordenada de la partícula aumenta en el tiempo (esto es, si $x_f > x_i$), Δx es positiva y $v_{x,\,\text{prom}} = \Delta x/\Delta t$ es positiva. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x positiva, esto es, hacia valores más grandes de x.

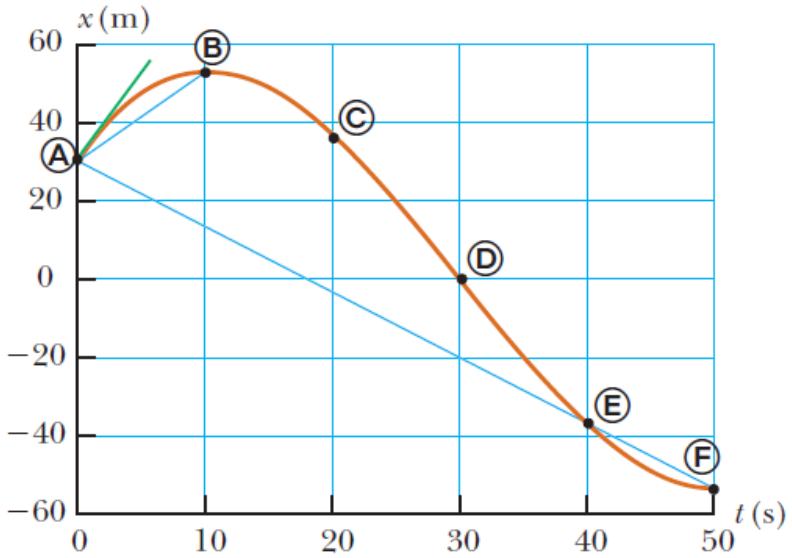


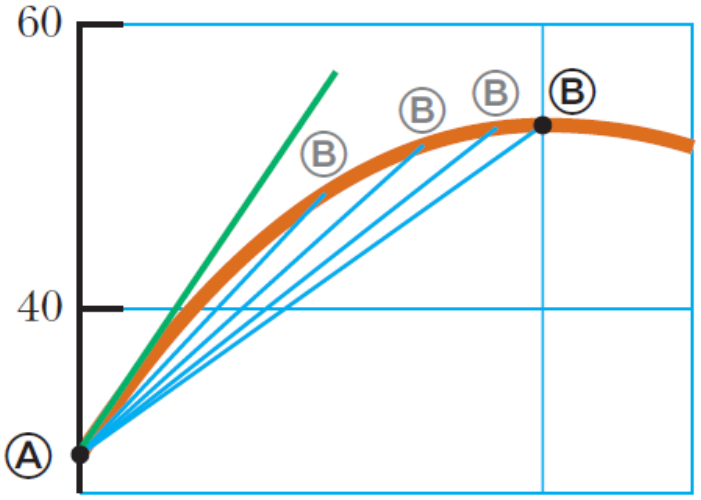
Velocidad y rapidez instantáneas



$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

a) Gráfica que representa el movimiento del automóvil .

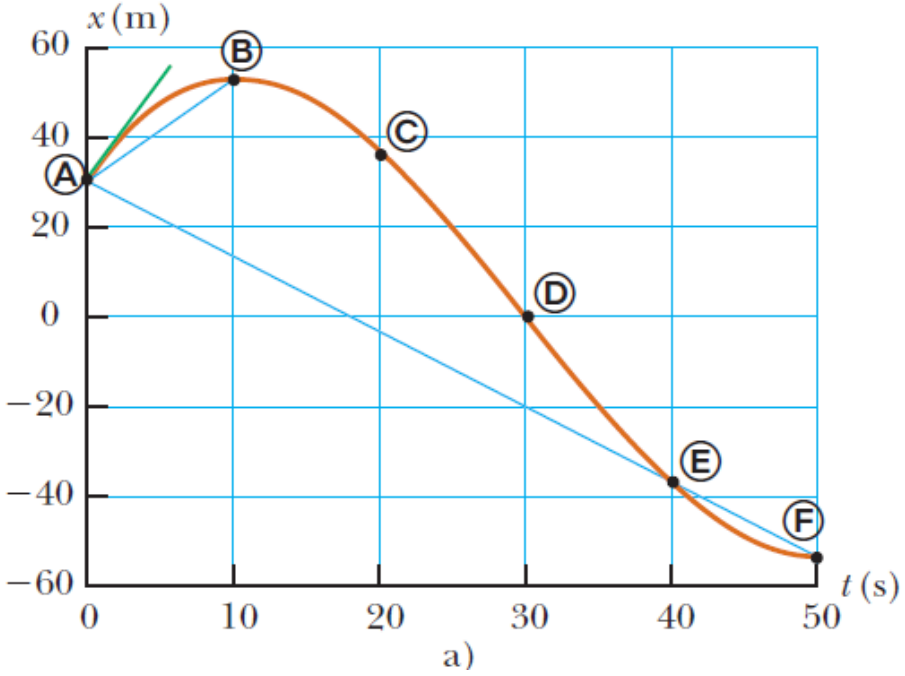




b) Una ampliación de la esquina superior izquierda de la gráfica muestra cómo la línea azul entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ tiende a la línea tangente verde conforme el punto Ⓑ se mueve más cerca del punto Ⓐ.

Velocidad y rapidez instantáneas

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero. Cuando la pendiente de la gráfica posición-tiempo es positiva, como en cualquier momento durante los primeros 10 s en la figura, v_x es positiva y el automóvil se mueve hacia valores más grandes de x. Después del punto Ⓑ, v_x es negativa porque la pendiente es negativa y el automóvil se mueve hacia valores más pequeños de x. En el punto Ⓑ, la pendiente y la velocidad instantánea son cero y el automóvil está momentáneamente en reposo.



a)

Velocidad y rapidez instantáneas

De aquí en adelante, se usa la palabra *velocidad* para designar velocidad instantánea. Cuando se esté interesado en *velocidad promedio*, siempre se usará el adjetivo *promedio*.

La **rapidez instantánea** de una partícula se define como la magnitud de su velocidad instantánea. Como con la rapidez promedio, la rapidez instantánea no tiene dirección asociada con ella. Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de +25 m/s a lo largo de una línea dada y otra partícula tiene una velocidad instantánea de −25 m/s a lo largo de la misma línea, ambas tienen una rapidez de 25 m/s.

Pregunta rápida ¿Los integrantes de la patrulla de caminos están más interesados en a) la rapidez promedio o b) la rapidez instantánea mientras usted conduce?

Velocidad y rapidez

Otros usos de estas palabras: Se refieren a que en que intervalos de tiempo se realizan diferentes acciones y en ese caso son equivalentes.

https://www.youtube.com/watch?v=qMsm_mBhQnA&hd=1

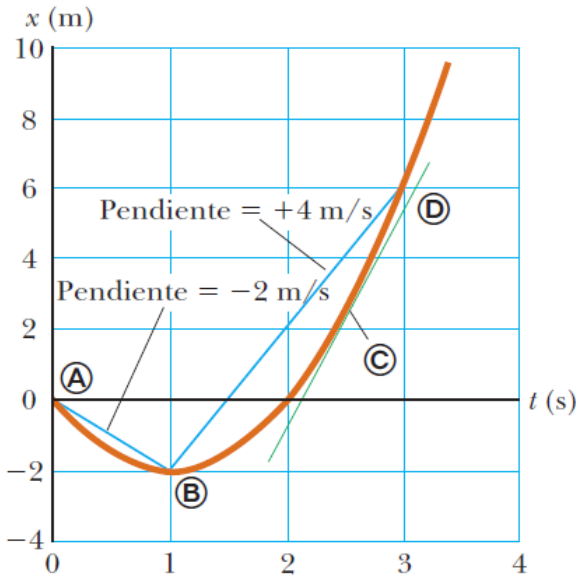
EJEMPLO Velocidad promedio e instantánea

Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$, donde x está en metros y t está en segundos. La gráfica posición-tiempo para este movimiento se muestra en la figura 2.4. Note que la partícula se mueve en la dirección x negativa durante el primer segundo de movimiento, en el momento $t = 1$ s está momentáneamente en reposo y se mueve en la dirección x positiva en tiempos $t > 1$ s.

A) Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo $t = 0$ a $t = 1$ s y $t = 1$ s a $t = 3$ s.

B) Calcule la velocidad promedio durante estos dos intervalos de tiempo.

C) Encuentre la velocidad instantánea de la partícula en $t = 2.5$ s.



Gráfica posición-tiempo para una partícula que tiene una coordenada x que varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$.

SOLUCIÓN

A)

En el primer intervalo de tiempo, haga $t_i = t_{Ⓐ} = 0$ y $t_f = t_{Ⓑ} = 1$ s y aplique la ecuación 2.1 para encontrar el desplazamiento:

$$\Delta x_{Ⓐ\to Ⓑ} = x_f - x_i = x_{Ⓑ} - x_{Ⓐ}$$
$$= [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = \boxed{-2\text{ m}}$$

Para el segundo intervalo de tiempo ($t = 1$ s a $t = 3$ s), sea $t_i = t_{Ⓑ} = 1$ s y $t_f = t_{Ⓓ} = 3$ s:

$$\Delta x_{Ⓑ\to Ⓓ} = x_f - x_i = x_{Ⓓ} - x_{Ⓑ}$$
$$= [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = \boxed{+8\text{ m}}$$

También es posible leer estos desplazamientos directamente de la gráfica posición-tiempo.

B)

En el primer intervalo de tiempo, aplique la ecuación con $\Delta t = t_f - t_i = t_{Ⓑ} - t_{Ⓐ} = 1$ s:

$$v_{x,\text{ prom }(Ⓐ\to Ⓑ)} = \frac{\Delta x_{Ⓐ\to Ⓑ}}{\Delta t} = \frac{-2\text{ m}}{1\text{ s}} = \boxed{-2\text{ m/s}}$$

En el segundo intervalo de tiempo, $\Delta t = 2$ s:

$$v_{x,\text{ prom }(Ⓑ\to Ⓓ)} = \frac{\Delta x_{Ⓑ\to Ⓓ}}{\Delta t} = \frac{8\text{ m}}{2\text{ s}} = \boxed{+4\text{ m/s}}$$

Estos valores son los mismos que las pendientes de las líneas que unen estos puntos en la figura.

C)

Mida la pendiente de la línea verde en $t = 2.5$ s (punto Ⓒ) en la figura :

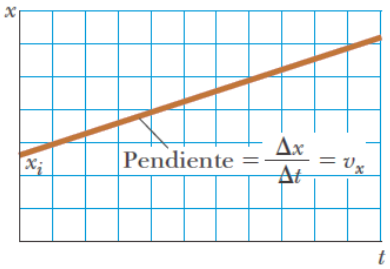
$$v_x = \boxed{+6\text{ m/s}}$$

Modelos de análisis: La partícula bajo velocidad constante

Cuando se trate de resolver un problema nuevo, se debe identificar los detalles fundamentales del mismo e intentar reconocer cual de los tipos de problemas que ya se resolvieron sirve como modelo.

Si la velocidad de una partícula es constante, su velocidad instantánea en cualquier instante durante un intervalo de tiempo es la misma que la velocidad promedio durante el intervalo. Esto es, $v_x = v_{x,\,\text{prom}}$.

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Gráfica posición-tiempo para una partícula bajo velocidad constante. El valor de la velocidad constante es la pendiente de la línea.

Al recordar que $\Delta x = x_f - x_i$, se ve que $v_x = (x_f - x_i)/\Delta t$, o bien

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

En la práctica, por lo general se elige el tiempo al principio del intervalo como $t_i = 0$ y el tiempo al final del intervalo como $t_f = t$, de modo que

$$x_f = x_i + v_x t \quad (\text{para } v_x \text{ constante})$$

EJEMPLO **Modelado de un corredor como partícula**

Una científica estudia la biomecánica del cuerpo humano. Ella determina la velocidad de un sujeto experimental mientras corre a lo largo de una línea recta con una rapidez constante. La científica activa el cronómetro cuando el corredor pasa por un punto conocido y lo detiene después de que el corredor pasa por otro punto a 20 m de distancia. El intervalo de tiempo que indica el cronómetro es 4.0 s.

A) ¿Cuál es la velocidad del corredor?

B) Si el corredor continúa su movimiento después de desactivar el cronómetro, ¿cuál es su posición después de transcurridos 10 s?

SOLUCIÓN

A)

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20\ \text{m} - 0}{4.0\ \text{s}} = 5.0\ \text{m/s}$$

B)

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (5.0\ \text{m/s})(10\ \text{s}) = 50\ \text{m}$$

Ahora considere una partícula que se mueve con una rapidez constante a lo largo de una trayectoria curva. Esta situación se representa con el modelo de **partícula bajo rapidez constante**. La ecuación básica para este modelo es

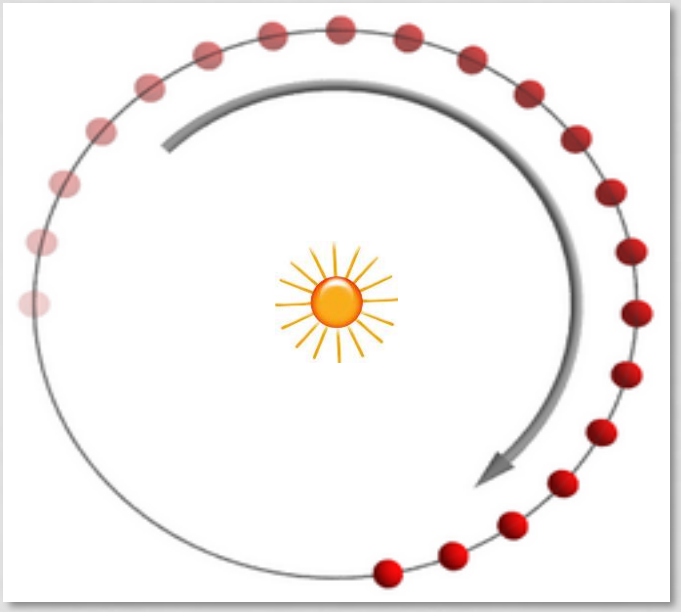
$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Como ejemplo, considere una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. Si la rapidez es 5.00 m/s y el radio de la trayectoria es de 10.0 m, se calcula el intervalo de tiempo requerido para completar un viaje alrededor del círculo:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\ (10.0\ \text{m})}{5.00\ \text{m/s}} = 12.6\ \text{s}$$

Ejercicio para hacer en clase:

Suponiendo que la órbita de la tierra alrededor del Sol es circular y la distancia Tierra Sol es de 8 minutos luz en promedio ¿con que rapidez viaja la Tierra?



Aceleración

Considere que un objeto representado como una partícula en movimiento a lo largo del eje x tiene una velocidad inicial v_{xi} en el tiempo t_i y una velocidad final v_{xf} en el tiempo t_f, como en la figura 2.6a.

La **aceleración promedio** $a_{x,\,\text{prom}}$ de la partícula se define como el *cambio* en velocidad Δv_x dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre el cambio:

$$a_{x,\,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

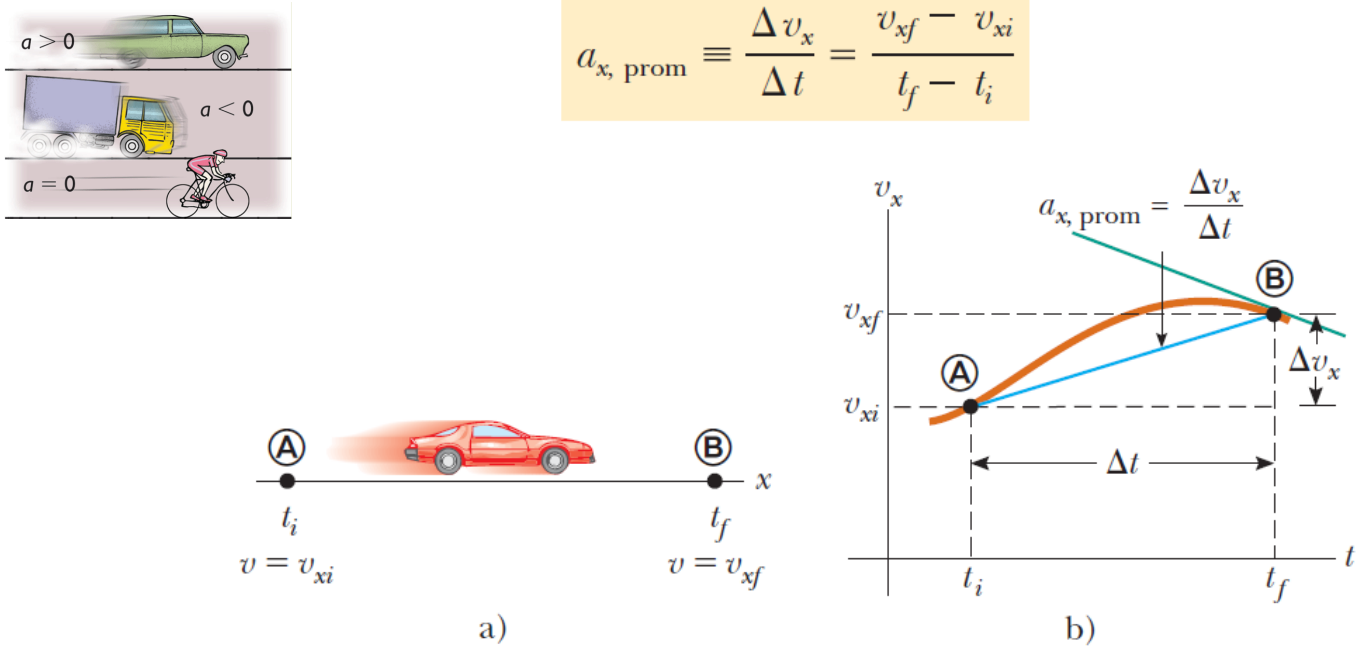


Figura 2.6 a) Un automóvil, modelado como partícula, que se mueve a lo largo del eje x de Ⓐ a Ⓑ, tiene velocidad v_{xi} en $t = t_i$ y velocidad v_{xf} en $t = t_f$. b) Gráfica velocidad-tiempo (café) para la partícula que se mueve en una línea recta. La pendiente de la línea recta azul que conecta Ⓐ y Ⓑ es la aceleración promedio del automóvil durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La pendiente de la línea verde es la aceleración instantánea del automóvil en el punto Ⓑ.

En algunas situaciones el valor de la aceleración promedio puede ser diferente durante distintos intervalos de tiempo. Por lo tanto, es útil definir la **aceleración instantánea** como

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

Cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su velocidad. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena.

Desde ahora se usará el término *aceleración* para dar a entender aceleración instantánea. Cuando se hable de aceleración promedio, siempre se usará el adjetivo *promedio*. Puesto que $v_x = dx/dt$, la aceleración también se escribe como

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Esto es: en un movimiento unidimensional, la aceleración es igual a la *segunda derivada* de x respecto del tiempo.

La figura 2.7 ilustra cómo una gráfica aceleración-tiempo se relaciona con una gráfica velocidad-tiempo. La aceleración en cualquier tiempo es la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en dicho tiempo. Los valores positivos de la aceleración corresponden a los puntos en la figura 2.7a donde la velocidad aumenta en la dirección x positiva. La aceleración alcanza un máximo en el tiempo $t_Ⓐ$, cuando la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo es un máximo. Después, la aceleración llega a cero en el tiempo $t_Ⓑ$, cuando la velocidad es un máximo (esto es: cuando la pendiente de la gráfica $v_x - t$ es cero). La aceleración es negativa cuando la velocidad disminuye en la dirección x positiva, y llega a su valor más negativo en el tiempo $t_Ⓒ$.

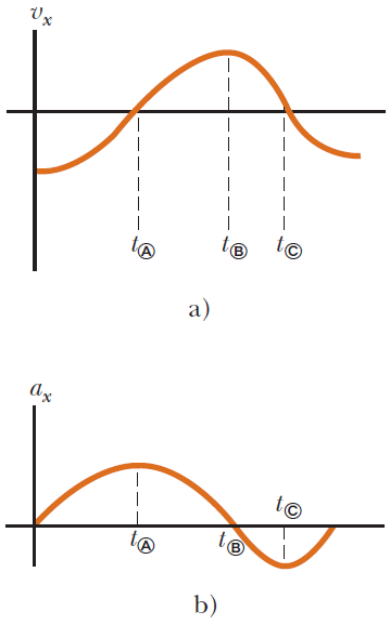
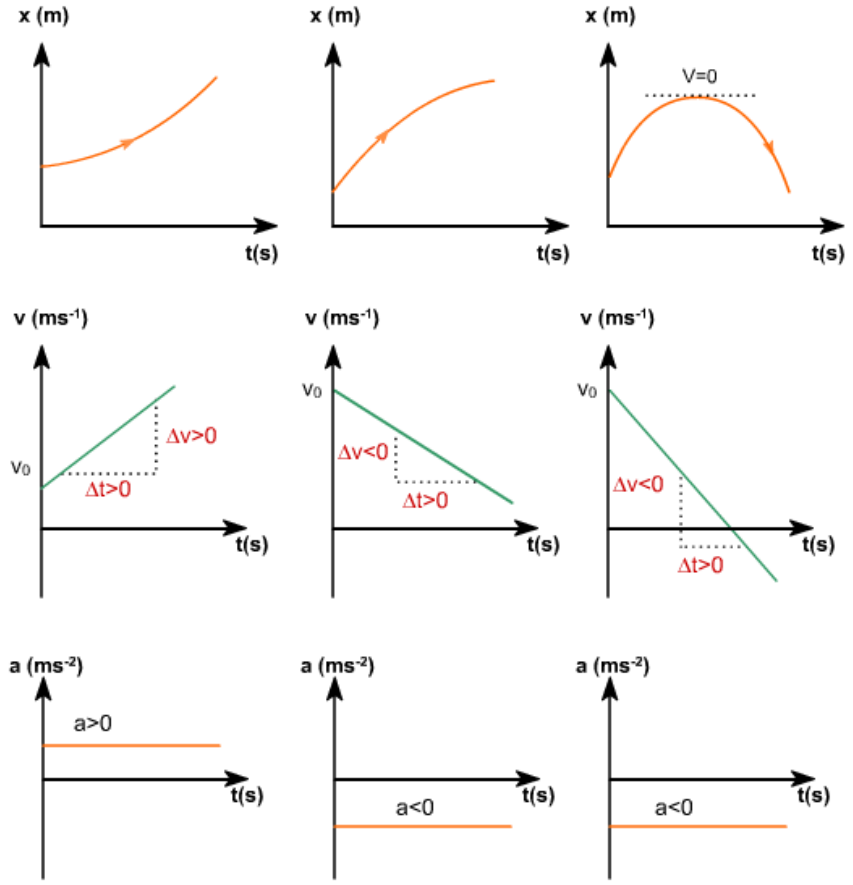


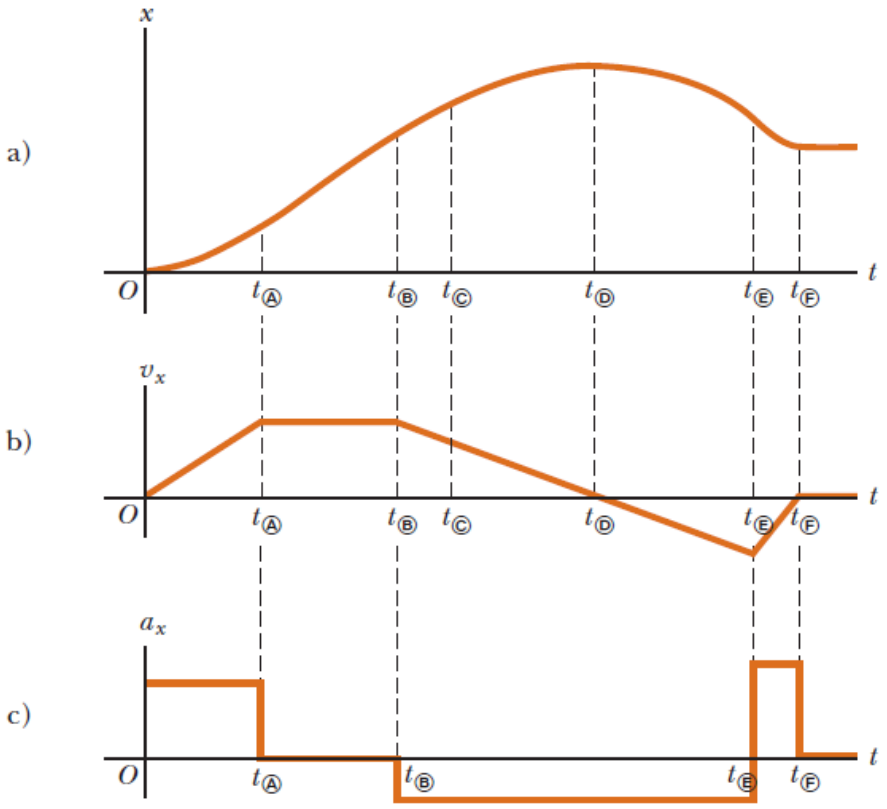
Figura 2.7 La aceleración instantánea se obtiene de la gráfica velocidad-tiempo a). En cada instante, la aceleración en la gráfica de a_x en función de t b) es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva de v_x en función de t a).



EJEMPLO CONCEPTUAL 2.5 Relaciones gráficas entre x, v_x y a_x

La posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje *x* varía con el tiempo, como en la figura 2.8a. Grafique la velocidad en función del tiempo y la aceleración en función del tiempo para el objeto.

SOLUCIÓN



EJEMPLO 2.6 Aceleración promedio e instantánea

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía de acuerdo con la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s, donde t está en segundos.

A) Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 2.0$ s.

B) Determine la aceleración en $t = 2.0$ s.

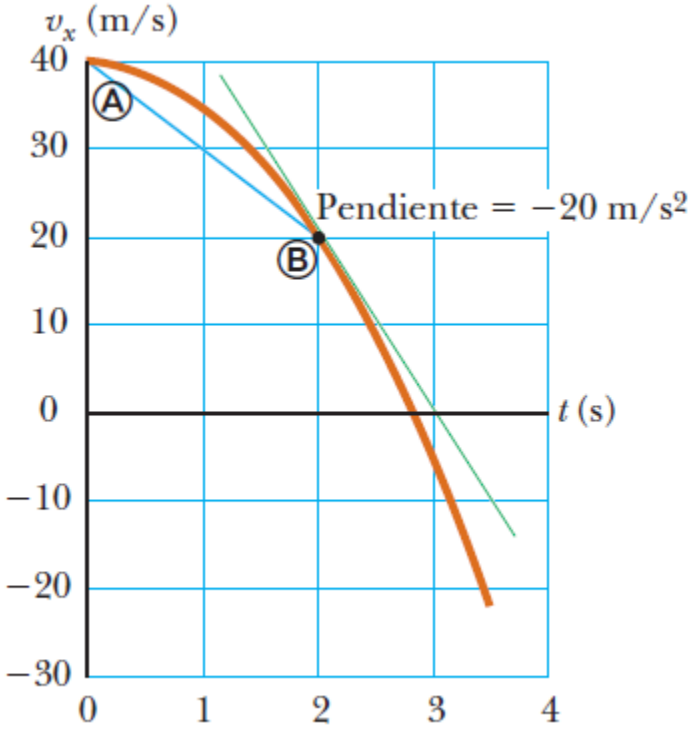
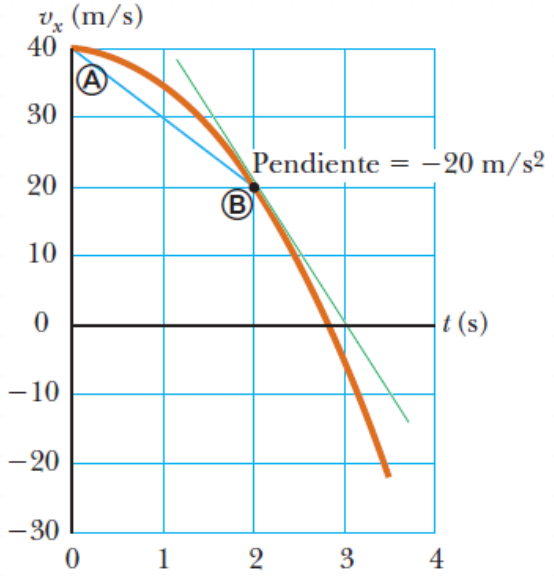


Figura 2.9 (Ejemplo 2.6) Gráfica velocidad-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$ m/s. La aceleración en $t = 2$ s es igual a la pendiente de la línea tangente verde en dicho tiempo.

SOLUCIÓN

Piense qué hace la partícula a partir de la representación matemática. ¿Se mueve en $t = 0$? ¿En qué dirección? ¿Aumenta velocidad o frena? La figura 2.9 es una gráfica v_x–t que se creó a partir de la expresión de velocidad en función del tiempo dada en el enunciado del problema. Puesto que la pendiente de toda la curva v_x–t es negativa, se espera que la aceleración sea negativa.



Encuentre las velocidades en $t_i = t_Ⓐ = 0$ y $t_f = t_Ⓑ = 2.0$ s al sustituir estos valores de t en la expresión para la velocidad:

$$v_{xⒶ} = (40 - 5t_Ⓐ^2)\ \text{m/s} = [40 - 5(0)^2]\ \text{m/s} = +40\ \text{m/s}$$

$$v_{xⒷ} = (40 - 5t_Ⓑ^2)\ \text{m/s} = [40 - 5(2.0)^2]\ \text{m/s} = +20\ \text{m/s}$$

Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo especificado $\Delta t = t_Ⓑ - t_Ⓐ = 2.0$ s:

$$a_{x,\,\text{prom}} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xⒷ} - v_{xⒶ}}{t_Ⓑ - t_Ⓐ} = \frac{(20 - 40)\ \text{m/s}}{(2.0 - 0)\ \text{s}}$$

$$= -10\ \text{m/s}^2$$

El signo negativo es consistente con las expectativas, a saber: que la aceleración, representada por la pendiente de la línea que une los puntos inicial y final en la gráfica velocidad-tiempo, es negativa.

SOLUCIÓN B)

Al saber que la velocidad inicial en cualquier tiempo t es $v_{xi} = (40 - 5t^2)$ m/s, encuentre la velocidad en cualquier tiempo ulterior $t + \Delta t$:

$$v_{xf} = 40 - 5(t + \Delta t)^2 = 40 - 5t^2 - 10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Encuentre el cambio en velocidad en el intervalo de tiempo Δt:

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = [-10t\,\Delta t - 5(\Delta t)^2]\ \text{m/s}$$

Para encontrar la aceleración en cualquier tiempo t, divida esta expresión entre Δt y tome el límite del resultado conforme Δt tiende a cero:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\Delta t) = -10t\ \text{m/s}^2$$

Sustituya $t = 2.0$ s:

$$a_x = (-10)(2.0)\ \text{m/s}^2 = \boxed{-20\ \text{m/s}^2}$$

Puesto que la velocidad de la partícula es positiva y la aceleración es negativa en este instante, la partícula disminuye su veocidad.

Note que las respuestas a los incisos A) y B) son diferentes. La aceleración promedio en A) es la pendiente de la línea azul que en la figura 2.9 conecta los puntos Ⓐ y Ⓑ. La aceleración instantánea en B) es la pendiente de la línea verde tangente a la curva en el punto Ⓑ. Repare también en que la aceleración *no* es constante en este ejemplo. Las situaciones que involucran aceleración constante se tratan en la sección 2.6.

La partícula bajo aceleración constante

Si la aceleración de una partícula varía con el tiempo, su movimiento es complejo y difícil de analizar. Sin embargo, un tipo muy común y simple de movimiento unidimensional, es aquel en el que la aceleración es constante.

Esta situación ocurre con suficiente frecuencia como para que se le identifique como un modelo de análisis: la **partícula bajo aceleración constante**. En la discusión que sigue se generan varias ecuaciones que describen el movimiento de una partícula para este modelo.

Si en la ecuación 2.9 sustituye $a_{x,\,\text{prom}}$ con a_x y toma $t_i = 0$ y t_f como cualquier tiempo t posterior, se encuentra que

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0}$$

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Esta poderosa expresión permite determinar la velocidad de un objeto en *cualquier* tiempo t, si se conoce la velocidad inicial v_{xi} del objeto y su aceleración a_x (constante). En la figura 2.11b se muestra una gráfica velocidad-tiempo para este movimiento con aceleración constante. La gráfica es una línea recta, cuya pendiente es la aceleración a_x; la pendiente (constante) es consistente con $a_x = dv_x/dt$ constante. Note que la pendiente es positiva, lo que indica una aceleración positiva. Si la aceleración fuese negativa, la pendiente de la línea en la figura 2.11b sería negativa. Cuando la aceleración es constante, la gráfica de aceleración en función del tiempo (figura 2.11c) es una línea recta que tiene una pendiente cero.

Puesto que la velocidad con aceleración constante varía linealmente en el tiempo, de acuerdo con la ecuación 2.13, se expresa la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo como la media aritmética de la velocidad inicial v_{xi} y la velocidad final v_{xf}:

$$v_{x,\,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Note que esta expresión para la velocidad promedio *sólo* se aplica en situaciones en que la aceleración es constante.

$$x_f - x_i = v_{x,\,\text{prom}}\, t = \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\, t$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\, t \quad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de las velocidades inicial y final.

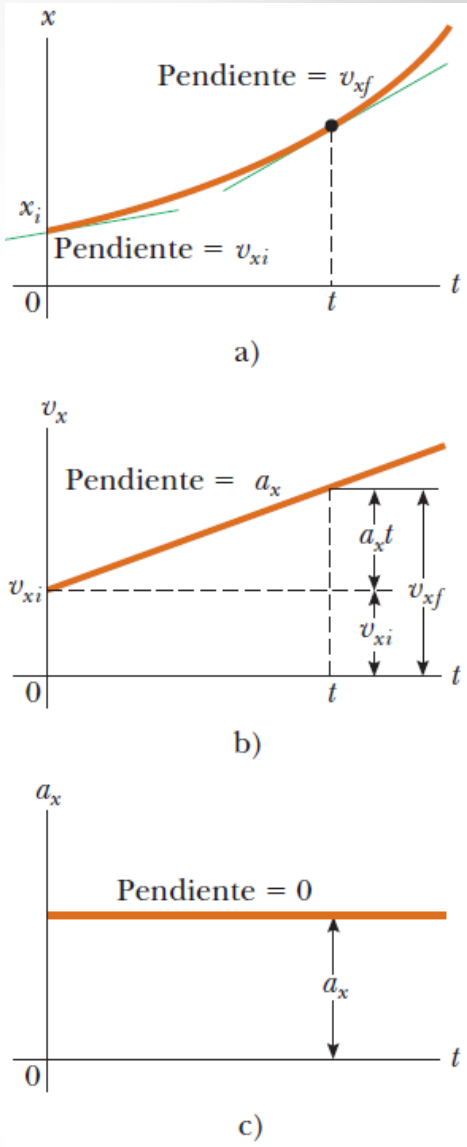


Figura 2.11 Una partícula bajo aceleración constante a_x que se mueve a lo largo del eje x: a) gráfica posición-tiempo, b) gráfica velocidad-tiempo y c) gráfica aceleración-tiempo.

Otra expresión útil para la posición de una partícula bajo aceleración constante se obtiene al sustituir

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]t$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \quad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

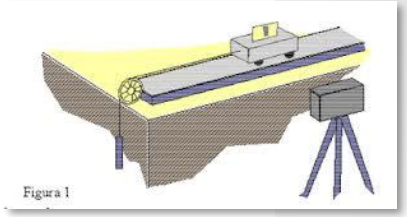


Figura 1

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de la velocidad inicial y la aceleración constante.

Por último, es posible obtener una expresión para la velocidad final que no contenga tiempo como variable al sustituir el valor de t

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = x_i + \frac{{v_{xf}}^2 - {v_{xi}}^2}{2a_x}$$

$${v_{xf}}^2 = {v_{xi}}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad \text{(para } a_x \text{ constante)}$$

Esta ecuación proporciona la velocidad final en términos de la velocidad inicial, la aceleración constante y la posición de la partícula.

Para movimiento con aceleración *cero*, se ve

$$\left.\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} = v_x \\ x_f &= x_i + v_x t \end{aligned}\right\} \quad \text{cuando } a_x = 0$$

Esto es, cuando la aceleración de una partícula es cero, su velocidad es constante y su posición cambia linealmente con el tiempo. En términos de modelos, cuando la aceleración de una partícula es cero, el modelo de partícula bajo aceleración constante se reduce al modelo de partícula bajo velocidad constante

Pregunta rápida 2.6 En la figura 2.12, relacione cada gráfica v_x–t de la parte superior con la gráfica a_x–t de la parte inferior que mejor describa el movimiento.

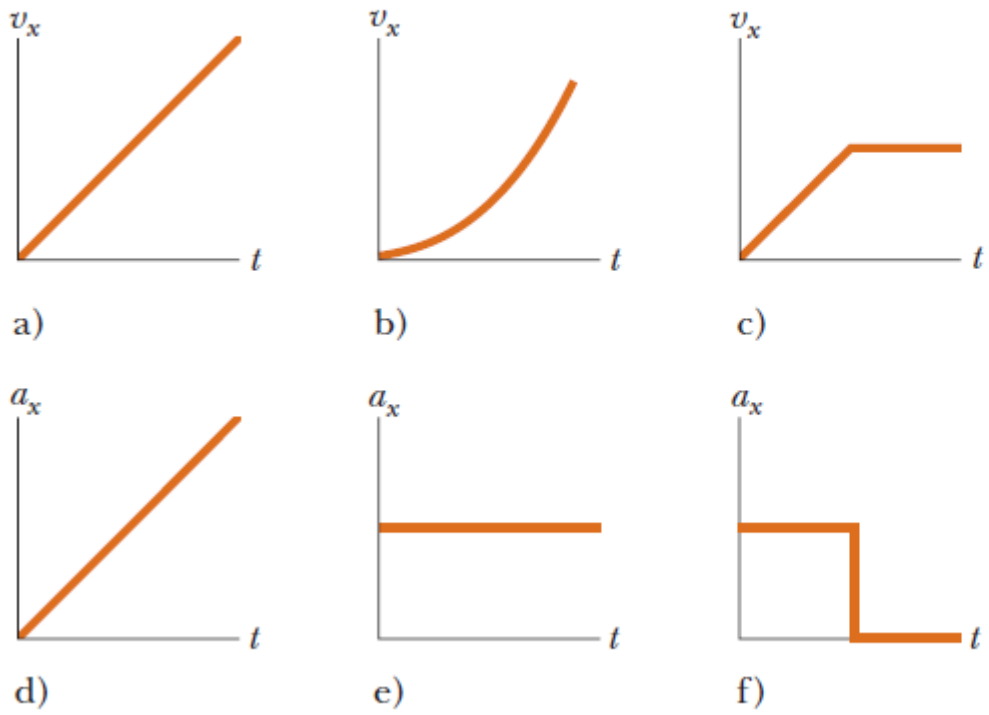


Figura 2.12 (Pregunta rápida 2.6) Los incisos a), b) y c) son gráficas v_x–t de objetos en movimiento unidimensional. Las posibles aceleraciones de cada objeto se muestran en forma desordenada en d), e) y f).

RESUMEN

TABLA 2.2

Ecuaciones cinemáticas para movimiento de una partícula bajo aceleración constante

Número de ecuación	Ecuación	Información que se conoce por la ecuación
2.13	$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocidad como función del tiempo
2.15	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Posición como función de velocidad y tiempo
2.16	$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Posición como función del tiempo
2.17	$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	Velocidad como función de la posición

Nota: El movimiento es a lo largo del eje *x*.

$$t = \frac{(V_f - V_i)}{a}$$

$$d = \frac{1}{2}(V_f + V_i)t$$

$$d = \frac{1}{2}(V_f + V_i)\frac{(V_f - V_i)}{a} = \frac{(V_f + V_i)}{2}\frac{(V_f - V_i)}{a}$$

$$d = \frac{(V_f^2 + V_f V_i - V_i V_f - V_i^2)}{2a} = \frac{(V_f^2 - V_i^2)}{2a}$$

$$2ad = \frac{(V_f^2 - V_i^2)}{2a} 2a = V_f^2 - V_i^2$$

$$V_i^2 + 2ad = V_f^2 - V_i^2 + V_i^2$$

$$V_f^2 = V_i^2 + 2ad$$

EJEMPLO 2.7 Aterrizaje en portaaviones

Un jet aterriza en un portaaviones a 140 mi/h ($\approx$ 63 m/s).

A) ¿Cuál es su aceleración (constante) si se detiene en 2.0 s debido a un cable de arresto que traba al jet y lo deja en reposo?

B) Si el jet toca al portaaviones en la posición $x_i = 0$, ¿cuál es su posición final?

SOLUCIÓN

A)

Es posible que haya visto películas o programas de televisión en los que un jet aterriza sobre un portaaviones y se lleva al reposo sorprendentemente rápido mediante un cable de arresto. Puesto que la aceleración del jet se supone constante, se le representa como una partícula bajo aceleración constante. El eje x se define como la dirección de movimiento del jet. Una lectura cuidadosa del problema revela que, además de estar dada la rapidez inicial de 63 m/s, también se sabe que la rapidez final es cero. Perciba también que no se tiene información acerca del cambio en posición del jet mientras frena.

La ecuación 2.13 es la única en la tabla 2.2 que no involucra la posición, de modo que se le usa para encontrar la aceleración del jet, representado como partícula:

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} \approx \frac{0 - 63\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}}$$

$$= -32\ \text{m/s}^2$$

B)

Aplique la ecuación 2.15 para resolver la posición final:

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \tfrac{1}{2}(63\ \text{m/s} + 0)(2.0\ \text{s}) = 63\ \text{m}$$

Si el jet recorre más allá de 63 m, puede caer al océano. La idea de usar cables de arresto para frenar a la aeronave que aterriza y permitirle aterrizar con seguridad en los barcos surgió en la primera Guerra Mundial. Los cables todavía son una parte vital de la operación de los modernos portaaviones.

EJEMPLO 2.8 ¡Observe el límite de rapidez!

Un automóvil que viaja con una rapidez constante de 45.0 m/s pasa por donde un patrullero en motocicleta está oculto detrás de un anuncio espectacular. Un segundo después de que el automóvil pasa el anuncio, el patrullero sale de su escondite para detener al automóvil, que acelera con una relación constante de 3.00 m/s^2. ¿Cuánto tiempo tarda en dar alcance al automóvil?

$$v_{x\,\text{automóvil}} = 45.0\ \text{m/s}$$
$$a_{x\,\text{automóvil}} = 0$$
$$a_{x\,\text{patrullero}} = 3.00\ \text{m/s}^2$$

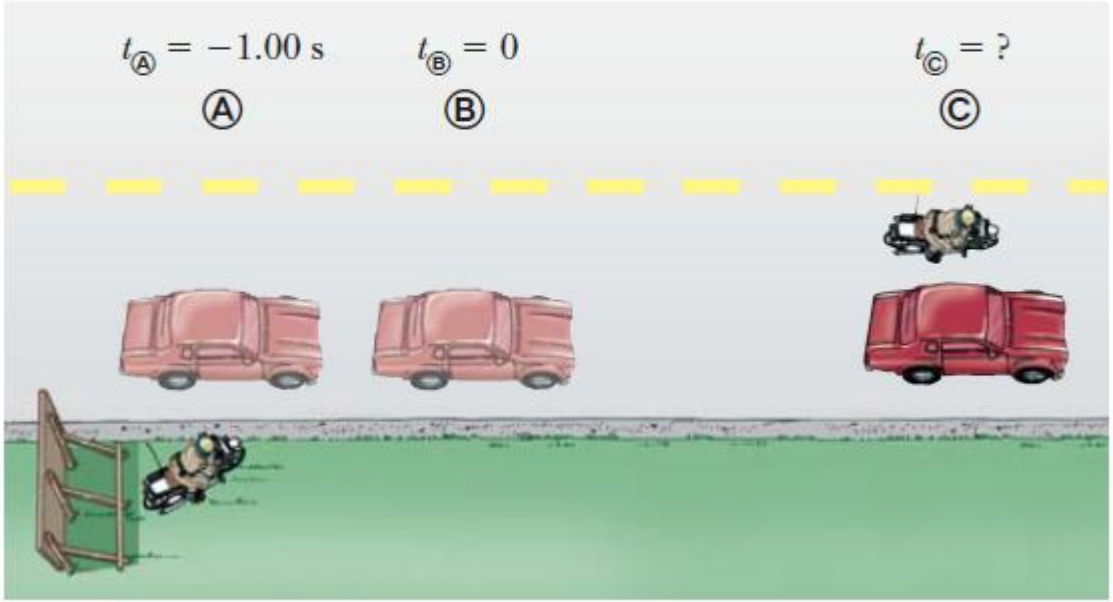


Figura 2.13 (Ejemplo 2.8) Un veloz automóvil rebasa a un patrullero oculto.

SOLUCIÓN

Una representación pictórica (figura 2.13) ayuda a clarificar la secuencia de eventos. El automóvil se modela como una partícula bajo velocidad constante y el patrullero se modela como una partícula bajo aceleración constante.

Primero, escriba expresiones para la posición de cada vehículo como función del tiempo. Es conveniente elegir la posición del anuncio como el origen y hacer $t_{Ⓑ} = 0$ como el tiempo en que el patrullero comienza a moverse. En dicho instante, el automóvil ya recorrió una distancia de 45.0 m desde el anuncio, porque viajó con una rapidez constante de $v_x = 45.0$ m/s durante 1 s. Por lo tanto, la posición inicial del automóvil es $x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

Al aplicar la ecuación 2.7 para obtener la posición del automóvil en cualquier tiempo t:

$$x_{\text{automóvil}} = x_{Ⓑ} + v_{x\,\text{automóvil}}t = 45.0\ \text{m} + (45.0\ \text{m/s})\,t$$

Una revisión rápida muestra que, en $t = 0$, esta expresión da la posición inicial correcta del automóvil cuando el patrullero comienza a moverse: $x_{\text{automóvil}} = x_{Ⓑ} = 45.0$ m.

El patrullero parte del reposo en $t_{Ⓑ} = 0$ y acelera a 3.00 m/s^2 alejándose del origen. Use la ecuación 2.16 para dar la posición en cualquier tiempo t:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$x_{\text{patrullero}} = 0 + (0)t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \tfrac{1}{2}(3.00\ \text{m/s}^2)t^2$$

Iguale las dos posiciones para representar al patrullero dando alcance al automóvil en la posición Ⓒ:

$$x_{\text{patrullero}} = x_{\text{automóvil}}$$

$$\tfrac{1}{2}(3.00\ \text{m/s}^2)t^2 = 45.0\ \text{m} + (45.0\ \text{m/s})t$$

Simplifique para obtener una ecuación cuadrática:

$$1.50t^2 - 45.0t - 45.0 = 0$$

La solución positiva de esta ecuación es $t =$ 31.0 s.

Objetos en caída libre

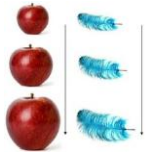
Es bien sabido que, en ausencia de resistencia del aire, todos los objetos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración constante bajo la influencia de la gravedad de la Tierra. No fue sino hasta alrededor de 1600 que se aceptó esta conclusión. Antes de esta época, las enseñanzas del filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) sostenían que los objetos más pesados caían más rápido que los ligeros.

GALILEO GALILEI

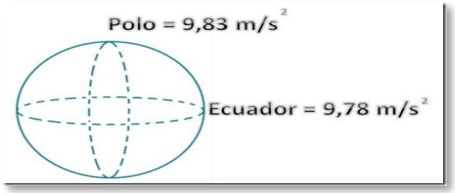
Físico y astrónomo italiano

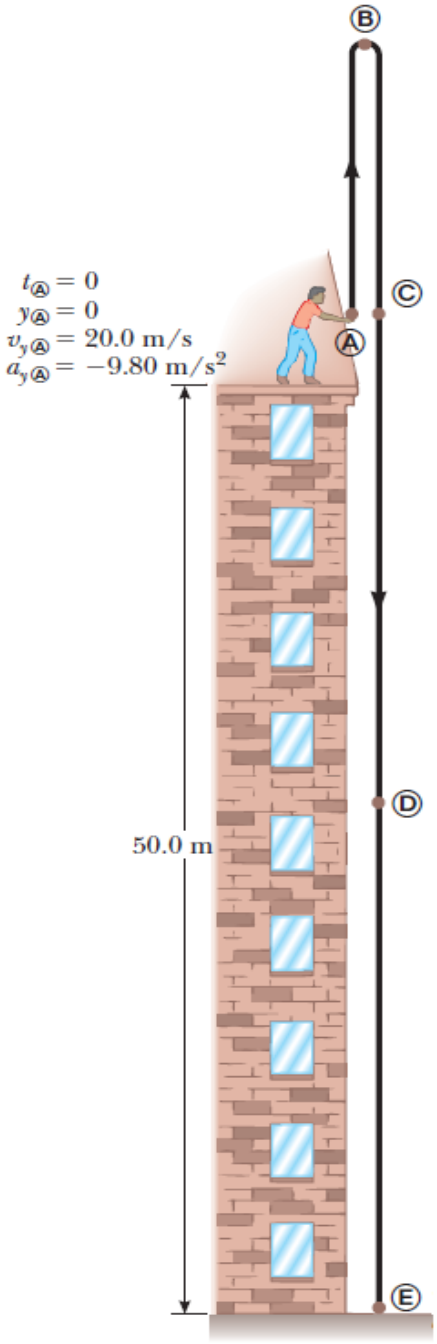
(1564-1642)

Galileo formuló las leyes que gobiernan el movimiento de los objetos en caída libre e hizo muchos otros descubrimientos reveladores en física y astronomía. Galileo defendió públicamente la afirmación de Nicolás Copérnico de que el Sol está en el centro del Universo (sistema heliocéntrico). Publicó *Diálogo sobre los dos grandes sistemas del mundo* para apoyar el modelo copernicano, que la Iglesia católica declaró herético.



$$g = 9.81 m/s^2$$





EJEMPLO 2.10 **¡No es un mal lanzamiento para un novato!**

A una piedra que se lanza desde lo alto de un edificio se le da una velocidad inicial de 20.0 m/s directo hacia arriba. El edificio tiene 50.0 m de alto y la piedra apenas libra el borde del techo en su camino hacia abajo, como se muestra en la figura 2.14.

A) Use $t_Ⓐ = 0$ como el tiempo cuando la piedra deja la mano del lanzador en la posición Ⓐ y determine el tiempo en el que la piedra llega a su altura máxima.

B) Encuentre la altura máxima de la piedra.

C) Determine la velocidad de la piedra cuando regresa a la altura desde la que se lanzó.

D) Encuentre la velocidad y posición de la piedra en $t = 5.00$ s.

Figura 2.14 (Ejemplo 2.10) Posición y velocidad frente a tiempo para una piedra en caída libre que se lanza inicialmente hacia arriba con una velocidad $v_{yi} = 20.0$ m/s. Muchas de las cantidades en las etiquetas para los puntos en el movimiento de la piedra se calculan en el ejemplo. ¿Puede verificar los valores que no están calculados?

SOLUCIÓN

A)

Tal vez usted tenga experiencia en soltar objetos o lanzarlos hacia arriba y observarlos caer, de modo que este problema debe describir una experiencia familiar. Puesto que la piedra está en caída libre, se modela como partícula bajo aceleración constante debido a la gravedad.

Use la ecuación 2.13 para calcular el tiempo en que la piedra llega a su altura máxima:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{a_y}$$

Sustituya valores numéricos:

$$t = t_{\text{Ⓑ}} = \frac{0 - 20.0\ \text{m/s}}{-9.80\ \text{m/s}^2} = 2.04\ \text{s}$$

B)

Sea $y_{\text{Ⓐ}} = 0$ y sustituya el tiempo del inciso A) en la ecuación 2.16 para encontrar la altura máxima:

$$y_{\text{máx}} = y_{\text{Ⓑ}} = y_{\text{Ⓐ}} + v_{x\text{Ⓐ}} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

$$y_{\text{Ⓑ}} = 0 + (20.0\ \text{m/s})(2.04\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)(2.04\ \text{s})^2 = 20.4\ \text{m}$$

C)

Sustituya los valores conocidos en la ecuación 2.17:

$$v_{y\text{Ⓒ}}^2 = v_{y\text{Ⓐ}}^2 + 2a_y\,(y_{\text{Ⓒ}} - y_{\text{Ⓐ}})$$

$$v_{y\text{Ⓒ}}^2 = (20.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)(0 - 0) = 400\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{y\text{Ⓒ}} = -20.0\ \text{m/s}$$

Cuando se saca la raíz cuadrada, se elige una raíz positiva o una negativa. Se elige la raíz negativa porque se sabe que la piedra se mueve hacia abajo al punto Ⓒ. La velocidad de la piedra cuando llega de vuelta a su altura original es igual en magnitud a su velocidad inicial pero es opuesta en dirección.

D)

Calcule la velocidad en Ⓓ a partir de la ecuación 2.13:

$$v_{y\text{Ⓓ}} = v_{y\text{Ⓐ}} + a_y t = 20.0\ \text{m/s} + (-9.80\ \text{m/s}^2)(5.00\ \text{s}) = -29.0\ \text{m/s}$$

Use la ecuación 2.16 para encontrar la posición de la piedra en $t_{\text{Ⓓ}} = 5.00$ s:

$$\begin{aligned} y_{\text{Ⓓ}} &= y_{\text{Ⓐ}} + v_{y\text{Ⓐ}} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 \\ &= 0 + (20.0\ \text{m/s})(5.00\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)(5.00\ \text{s})^2 \\ &= -22.5\ \text{m} \end{aligned}$$

$t_{\text{Ⓑ}} = 2.04$ s	$t_{\text{Ⓒ}} = 4.08$ s	$t_{\text{Ⓓ}} = 5.00$ s	$t_{\text{Ⓔ}} = 5.83$ s
$y_{\text{Ⓑ}} = 20.4$ m	$y_{\text{Ⓒ}} = 0$	$y_{\text{Ⓓ}} = -22.5$ m	$y_{\text{Ⓔ}} = -50.0$ m
$v_{y\text{Ⓑ}} = 0$	$v_{y\text{Ⓒ}} = -20.0$ m/s	$v_{y\text{Ⓓ}} = -29.0$ m/s	$v_{y\text{Ⓔ}} = -37.1$ m/s
$a_{y\text{Ⓑ}} = -9.80\ \text{m/s}^2$	$a_{y\text{Ⓒ}} = -9.80\ \text{m/s}^2$	$a_{y\text{Ⓓ}} = -9.80\ \text{m/s}^2$	$a_{y\text{Ⓔ}} = -9.80\ \text{m/s}^2$

Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

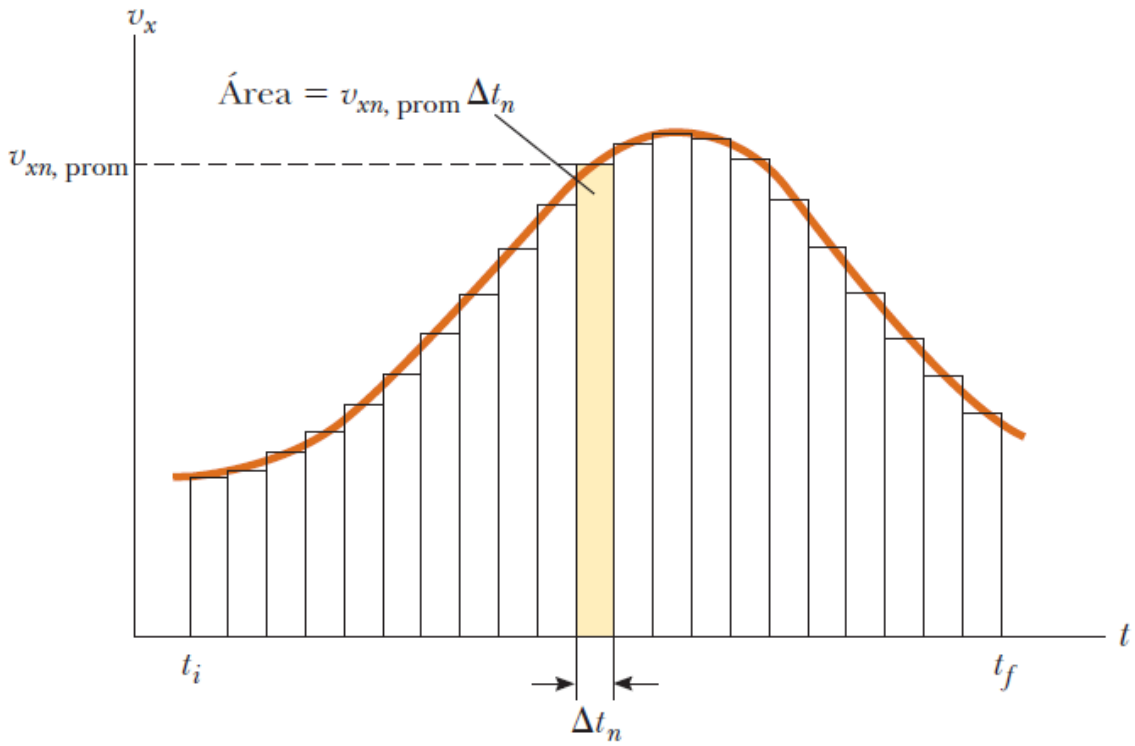


Figura 2.15 Velocidad en función del tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x. El área del rectángulo sombreado es igual al desplazamiento Δx en el intervalo de tiempo Δt_n, mientras que el área total bajo la curva es el desplazamiento total de la partícula.

Ecuaciones cinemáticas

Ahora se aplican las ecuaciones que definen la aceleración y velocidad para deducir dos de las ecuaciones cinemáticas, las ecuaciones 2.13 y 2.16.

La ecuación que define la aceleración (ec. 2.10),

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

se puede escribir como $dv_x = a_x\,dt$, o, en términos de una integral (o antiderivada), como

$$v_{xf} - v_{xi} = \int_0^t a_x\,dt$$

Para el caso especial en el que la aceleración es constante, a_x se puede remover de la integral para dar

$$v_{xf} - v_{xi} = a_x \int_0^t dt = a_x(t - 0) = a_x t \qquad (2.20)$$

que es la ecuación 2.13.

Ahora considere la ecuación que define la velocidad (ec. 2.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Esta ecuación se escribe como $dx = v_x\,dt$, o en forma integral como

$$x_f - x_i = \int_0^t v_x\,dt$$

Puesto que $v_x = v_{xf} = v_{xi} + a_x t$, esta expresión se convierte en

$$x_f - x_i = \int_0^t (v_{xi} + a_x t)\,dt = \int_0^t v_{xi}\,dt + a_x \int_0^t t\,dt = v_{xi}\,(t - 0) + a_x\left(\frac{t^2}{2} - 0\right)$$

$$x_f - x_i = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

que es la ecuación 2.16.

Resumen

DEFINICIONES

Cuando una partícula se mueve a lo largo del eje x desde alguna posición inicial x_i hasta alguna posición final x_f, su **desplazamiento** es

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \qquad (2.1)$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante cierto intervalo de tiempo es el desplazamiento Δx dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho desplazamiento:

$$v_{x,\,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

La **rapidez promedio** de una partícula es igual a la relación de la distancia total que recorre al intervalo de tiempo total durante el que recorre dicha distancia:

$$v_{\text{prom}} \equiv \frac{d}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la proporción $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero. Por definición, este límite es igual a la derivada de x respecto a t, o la relación de cambio en el tiempo de la posición:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.5)$$

La **rapidez instantánea** de una partícula es igual a la magnitud de su velocidad instantánea.

La **aceleración promedio** de una partícula se define como la relación de cambio en su velocidad Δv_x dividida entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$a_{x,\,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad (2.9)$$

La **aceleración instantánea** es igual al límite de la proporción $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a 0. Por definición, este límite es igual a la derivada de v_x respecto a t, o la relación de cambio en el tiempo de la velocidad:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.10)$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando la velocidad y la aceleración de un objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su velocidad. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena. Recuerde que $Fx \propto a_x$ es una forma útil de identificar la dirección de la aceleración al asociarla con una fuerza.

Un objeto en caída libre en presencia de la gravedad de la Tierra experimenta aceleración de caída libre dirigida hacia el centro de la Tierra. Si la resistencia del aire es despreciable, el movimiento ocurre cerca de la superficie de la Tierra y si el intervalo del movimiento es pequeño comparado con el radio de la Tierra, la aceleración de caída libre g es constante durante el rango de movimiento, donde g es igual a 9.80 m/s^2.

Los problemas complicados se abordan mejor en una forma organizada. Recuerde y aplique los pasos *conceptualizar*, *categorizar*, *analizar* y *finalizar* de la "Estrategia General para Resolver Problemas" cuando los necesite.

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Partícula bajo velocidad constante. Si una partícula se mueve en línea recta con una rapidez constante v_x, su velocidad constante se conoce por

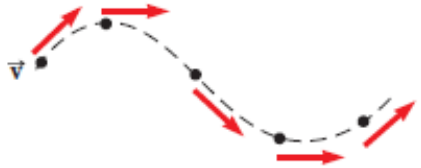
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.6}$$

y su posición se proporciona por

$$xf = x_i + v_x t \tag{2.7}$$

Partícula bajo rapidez constante. Si una partícula se mueve una distancia d a lo largo de una trayectoria curva o recta con rapidez constante, su rapidez constante se conoce por

$$v = \frac{d}{\Delta t} \tag{2.8}$$



Partícula bajo aceleración constante. Si una partícula se mueve en línea recta con aceleración constante a_x, su movimiento se describe mediante las ecuaciones cinemáticas:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \tag{2.13}$$

$$v_{x,\,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \tag{2.14}$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \tag{2.15}$$

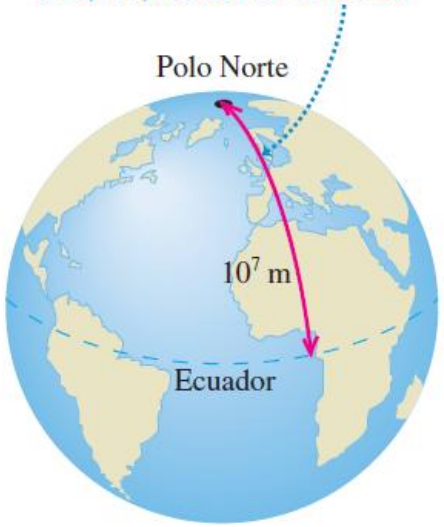
$$x_f = x_i + v_{xi} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \tag{2.16}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \tag{2.17}$$

Estándares y Unidades

En 1791 se definió que la distancia entre el Polo Norte y el ecuador era exactamente 10^7 m. Con la definición moderna del metro, esta distancia es aproximadamente 0.02% más que 10^7 m.

El metro se definió originalmente como 1/10,000,000 de esta distancia.



Usando la definición moderna del metro, la circunferencia ecuatorial de la Tierra es de 40 075 km, y la circunferencia del meridiano es de 40 008 km.

La distancia de la Tierra a la Luna es de 384 000 km, y la distancia de la Tierra al Sol es mayor por un factor de más o menos 400, o aproximadamente 150 millones km. Esta distancia se llama una *unidad astronómica* y tiene el símbolo AU. Los astrónomos usaban esta unidad antes de que se conociera con precisión la distancia de la Tierra al Sol, pero todavía es cómoda en la actualidad.

En unidades SI, una unidad astronómica es

$$1 \text{ AU} = 1.495\,98 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

El diámetro de nuestro Sistema Solar se expresa de manera práctica como alrededor de 10^{13} m o 60 AU.

Ya hemos indicado que la luz viaja en el vacío a una velocidad aproximada de 300 000 km/s. Por lo tanto, la distancia entre la Tierra y la Luna la recorre la luz en sólo un poco más de 1 segundo, y la luz del Sol tarda de manera aproximada 8 minutos en llegar a la Tierra. Con objeto de cubrir escalas de distancia fuera de nuestro Sistema Solar, los astrónomos han introducido la unidad año-luz (que no es SI, pero es práctica), que es la distancia que viaja la luz en 1 año en el vacío:

$$1 \text{ año luz} = 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}.$$

La estrella más cercana a nuestro Sol está a un poco más de 4 años luz. La galaxia Andrómeda, la galaxia hermana de nuestra Vía Láctea, está aproximadamente a 2.5 millones de años luz $= 2 \cdot 10^{22}$ m.

Por último, el radio del universo visible es aproximadamente de 14 mil millones de años luz $= 1.5 \cdot 10^{26}$ m.

Estándares y Unidades

Estándares de masa y tiempo

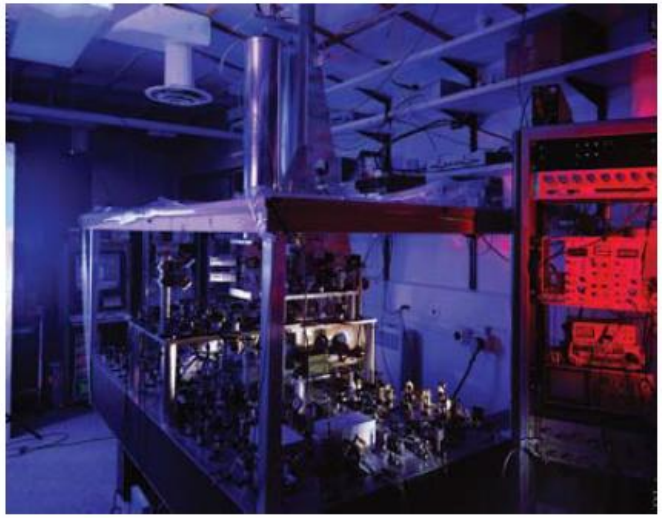


Figura 1.1 a) El Kilogramo Estándar Nacional núm. 20, una copia exacta del Kilogramo Estándar Internacional que se conserva en Sèvres, Francia, se alberga bajo una doble campana en una bóveda en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (NIST). b) El estándar de tiempo primario en Estados Unidos es un reloj atómico con fuente de cesio desarrollado en los laboratorios del NIST en Boulder, Colorado. El reloj nunca ganará ni perderá un segundo en 20 millones de años.

Masa

La unidad fundamental del SI de **masa**, el **kilogramo** (kg), es definido como **la masa de un cilindro de aleación platino–iridio específico que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia**. Esta masa estándar fue establecida en 1887 y no ha cambiado desde esa época porque el platino–iridio es una aleación inusualmente estable.

Tiempo

Antes de 1960 el estándar de **tiempo** fue definido en términos del *día solar medio* hacia el año 1900.

En 1967 el segundo fue redefinido para sacar ventaja de la enorme precisión que se logra con un dispositivo conocido como *reloj atómico* (figura 1.1b), que mide vibraciones de átomos de cesio. Ahora un segundo se define como **9 192 631 770 veces el periodo de vibración de la radiación del átomo de cesio 133.**

Sistema de unidades SI

Las primeras letras de las cuatro unidades básicas proporcionan otro nombre que se utiliza en forma común para el sistema SI: el sistema MKSA. Utilizaremos las primeras tres unidades (metro, kilogramo y segundo) en toda la primera parte de este libro y en toda la mecánica. Las definiciones actuales de las tres unidades básicas son como sigue:

- 1 metro (m) es la distancia que recorre un rayo de luz en el vacío en 1/299 792 458 de segundo. Originalmente, el metro se relacionaba al tamaño de la Tierra (figura 1.3).
- 1 kilogramo (kg) se define como la masa del prototipo internacional del kilogramo. Este prototipo, que se muestra en su elaborado contenedor de almacenamiento en la figura 1.4, se conserva en las afueras de París, Francia, en condiciones ambientales cuidadosamente controladas.
- 1 segundo (s) es el intervalo de tiempo durante el cual ocurren 9 192 631 770 oscilaciones de la onda electromagnética (vea el capítulo 31) que corresponde a la transición entre dos estados específicos del átomo de cesio-133. Hasta 1967, el estándar para el segundo era 1/86 400 de un día solar medio. Sin embargo, la definición atómica es más precisa y reproducible con mayor confiabilidad.

Sistema de unidades SI

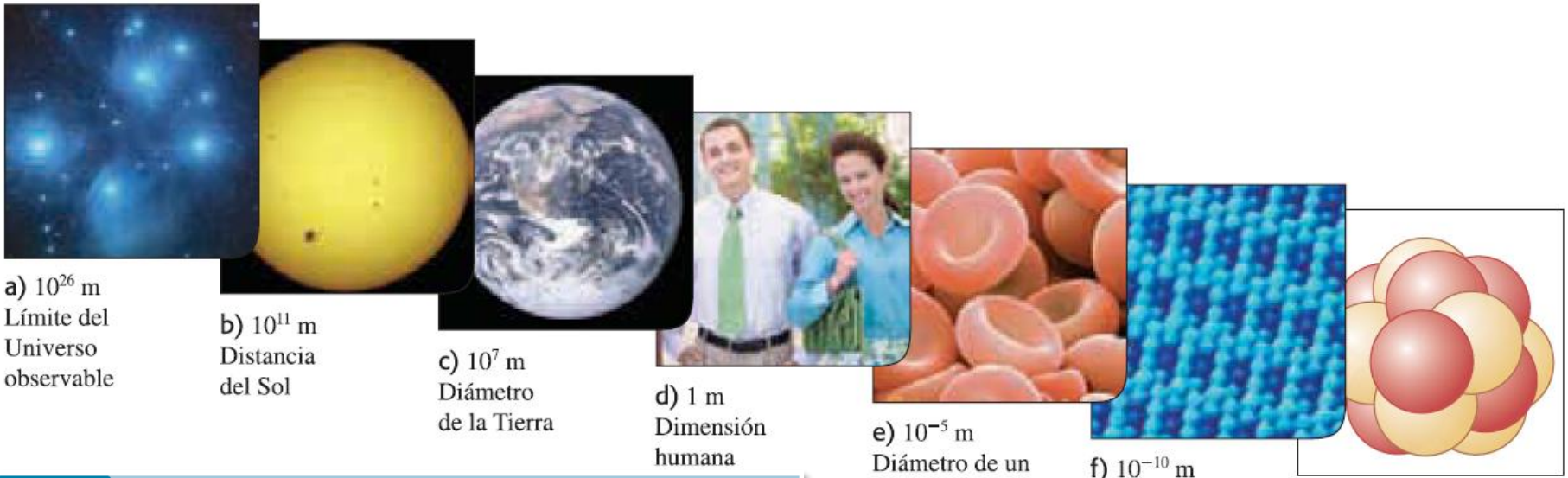
Convención de notación: Es práctica común usar letras latinas para las abreviaciones de unidades y letras cursivas (itálicas) para cantidades físicas. En este libro seguimos esta convención. Por ejemplo, m significa la unidad metro, mientras que m se usa para la cantidad física masa. Así, la expresión $m = 17.2$ kg significa que la masa de un objeto es de 17.2 kilogramos.

Tabla 1.1 **Nombres y abreviaturas de unidades para las unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades SI**

Unidad	Abreviatura	Unidad básica para
metro	m	longitud
kilogramo	kg	masa
segundo	s	tiempo
ampere	A	corriente
kelvin	K	temperatura
mol	mol	cantidad de sustancia
candela	cd	intensidad luminosa

Escalas de Longitud

Algunas longitudes representativas en el Universo. a) La distancia a las galaxias más distantes que podemos ver es aproximadamente de 10^{26} m (10^{23} km). b) El Sol está a 1.50×10^{11} m (1.50×10^{8} km) de la Tierra. c) El diámetro de la Tierra es de 1.28×10^{7} m (12,800 km). d) Un ser humano común tiene una estatura aproximada de 1.7 m (170 cm). e) Los glóbulos rojos humanos tienen un diámetro cercano a los 8×10^{-6} m (0.008 mm, es decir, 8 μm). f) Estos átomos de oxígeno, que se muestran dispuestos en la superficie de un cristal, tienen un radio aproximado de 10^{-10} m (10^{-4} μm). g) El radio de un núcleo atómico típico (que se muestra en una concepción artística) es del orden de 10^{-14} m (10^{-5} nm).



a) 10^{26} m Límite del Universo observable

b) 10^{11} m Distancia del Sol

c) 10^{7} m Diámetro de la Tierra

d) 1 m Dimensión humana

e) 10^{-5} m Diámetro de un glóbulo rojo

f) 10^{-10} m Radio de un átomo

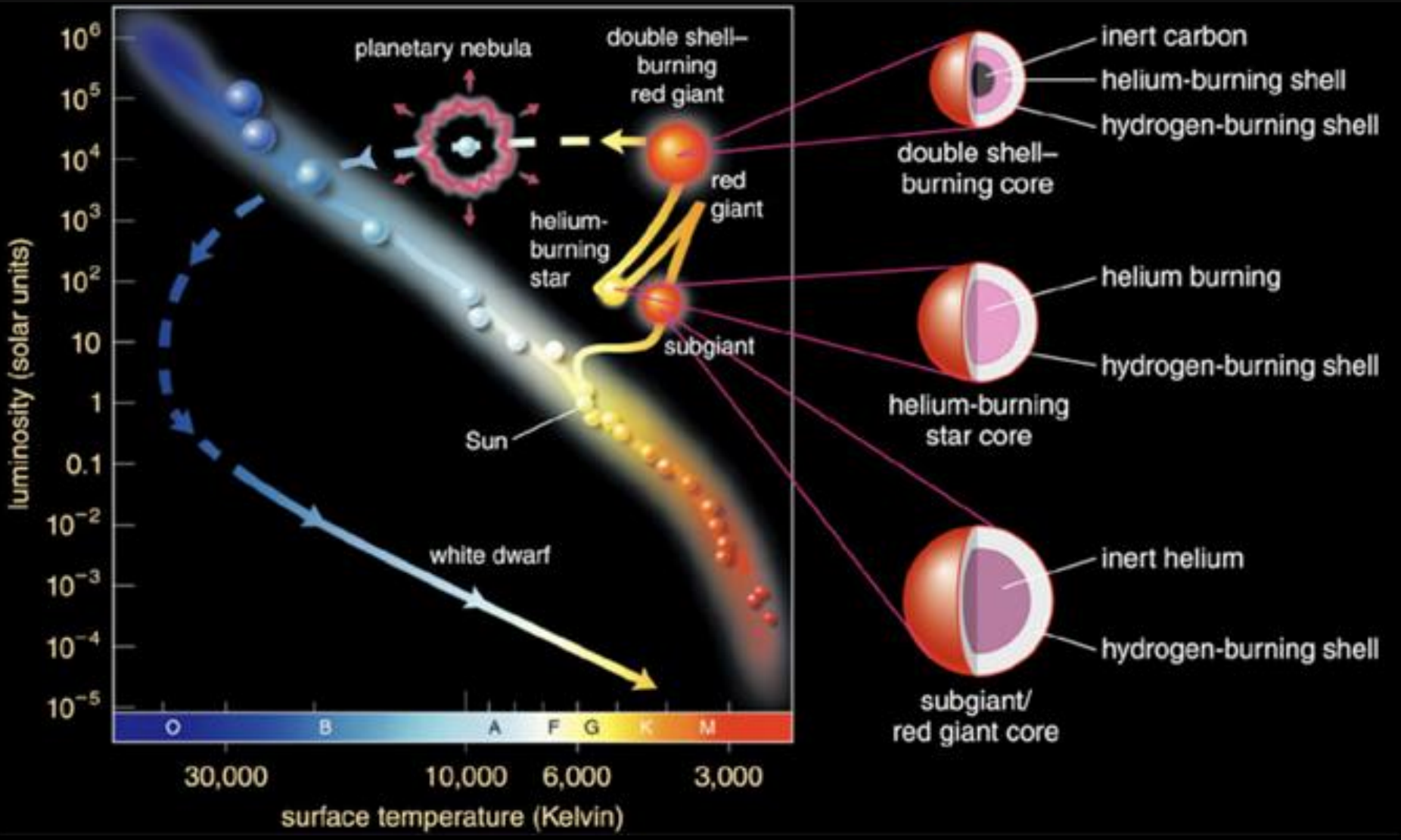
g) 10^{-14} m Radio de un núcleo atómico

Tabla 1.3 Prefijos estándar en el SI

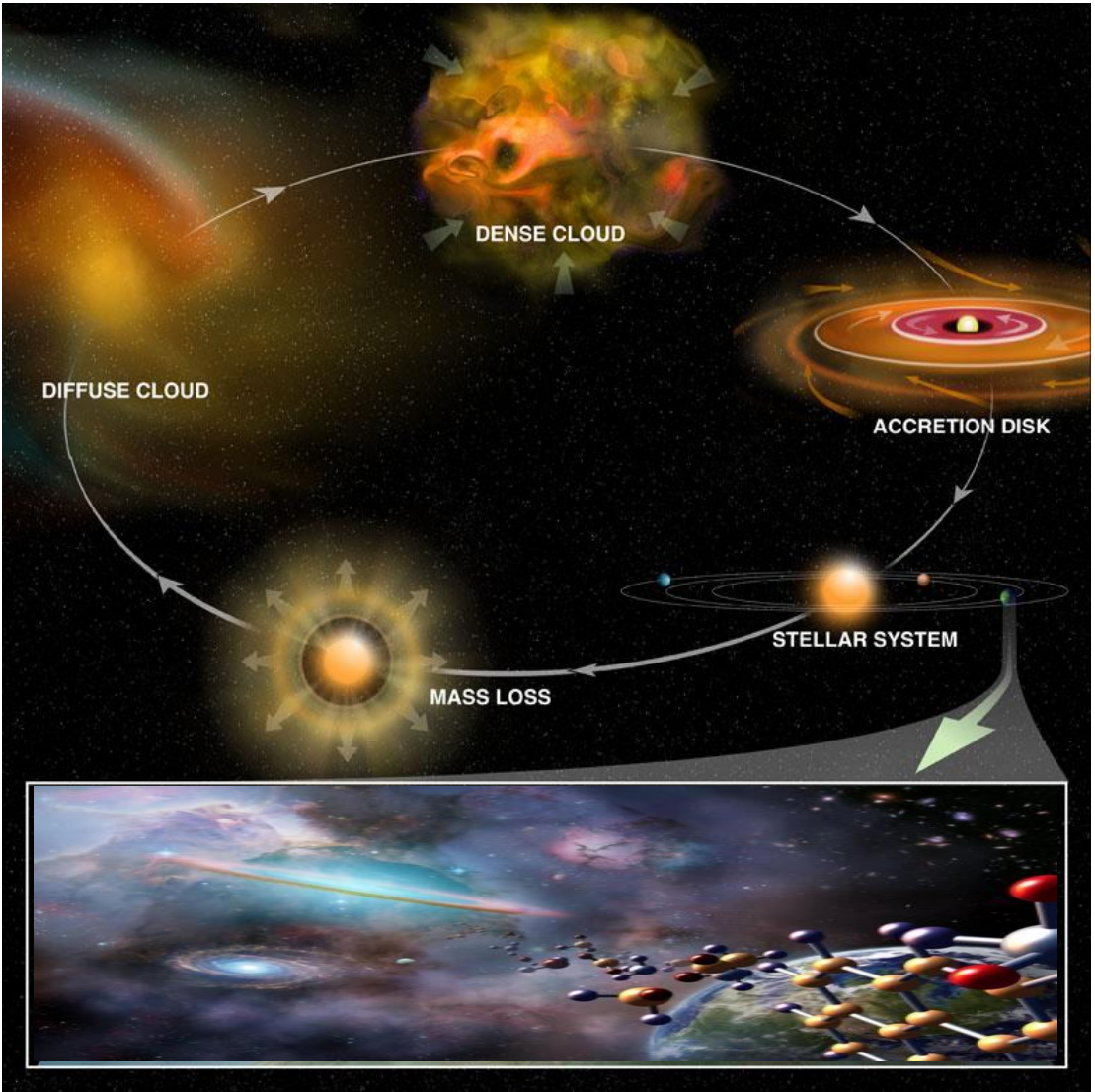
Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	yota-	Y	10^{-24}	yocto-	y
10^{21}	zeta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^{9}	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^{6}	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^{3}	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^{2}	hecto-	h	10^{-2}	centi-	c
10^{1}	deca-	da	10^{-1}	deci-	d

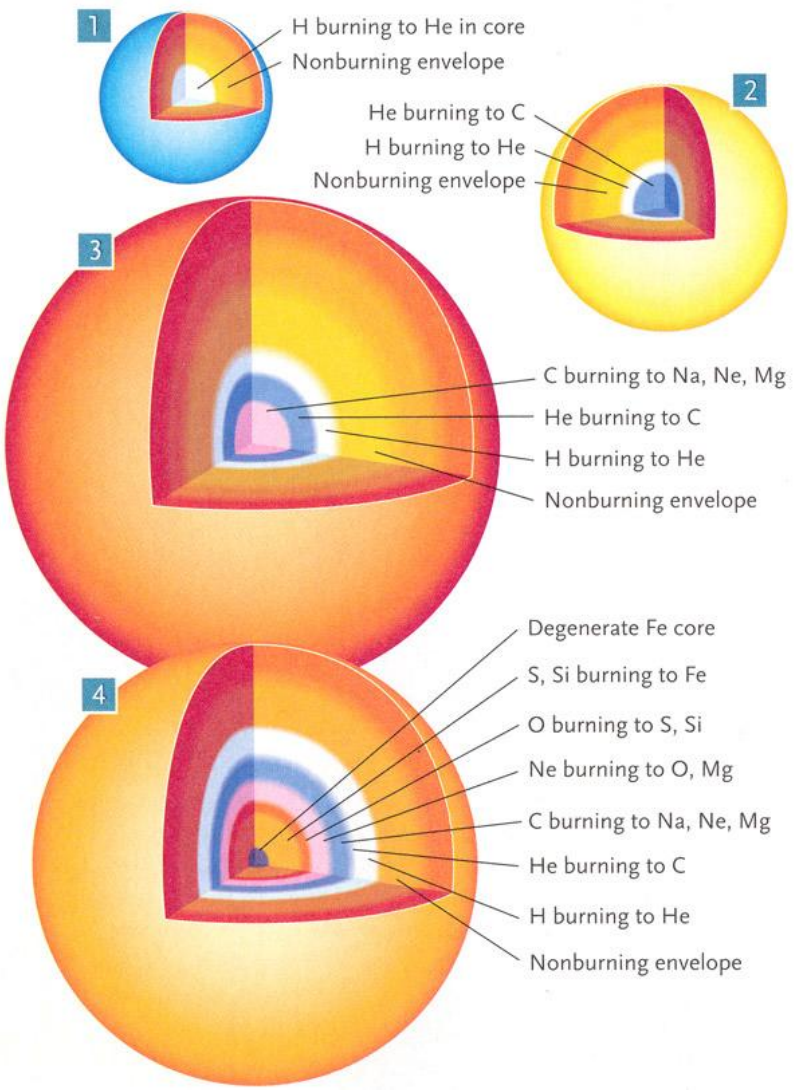
Por lo tanto, hay alrededor de 41 órdenes de magnitud entre el tamaño de un protón individual y el del universo visible completo.

Evolución Estelar



EVOLUCIÓN QUÍMICA Y MOLECULAR





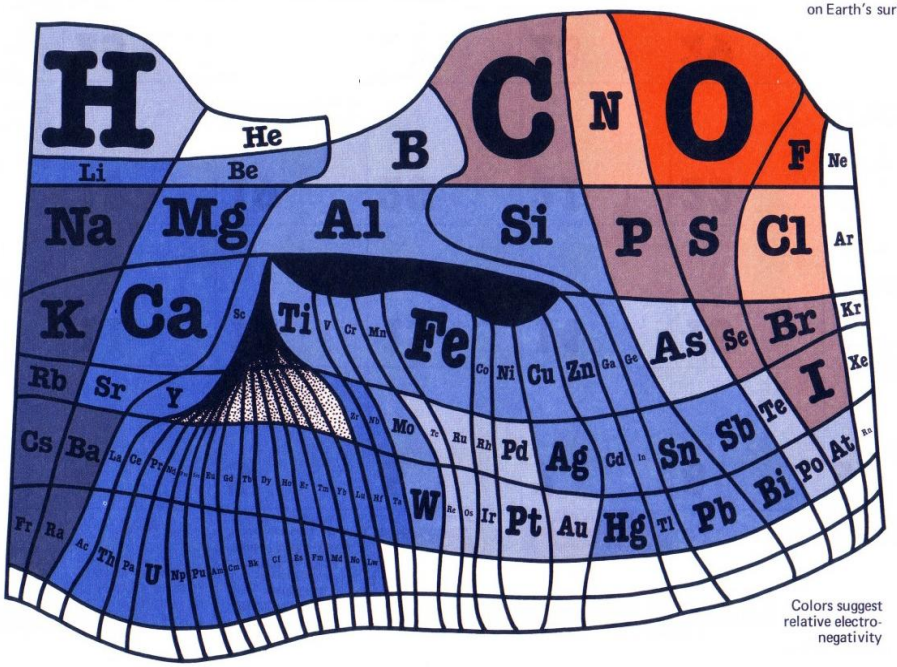
What Dave is Made of

Element	would fill a cube with sides of length	mass
oxygen	33.5 cm	43 kg
carbon	19.2 cm	16 kg
hydrogen	46.2 cm	7 kg
nitrogen	12.7 cm	1.8 kg
calcium	8.64 cm	1.0 kg
phosphorus	7.54 cm	780 g
potassium	5.46 cm	140 g
sulfur	4.07 cm	140 g
sodium	4.69 cm	100 g
chlorine	3.98 cm	95 g
magnesium	2.22 cm	19 g
iron	8.1 mm	4.2 g
fluorine	1.20 cm	2.6 g
zinc	6.9 mm	2.3 g
silicon	7.5 mm	1.0 g
rubidium	7.6 mm	0.68 g
strontium	5.0 mm	0.32 g
bromine	4.0 mm	0.26 g
lead	2.2 mm	0.12 g
copper	2.0 mm	72 mg
aluminum	2.8 mm	60 mg
cadmium	1.8 mm	50 mg
cerium	1.7 mm	40 mg
barium	1.8 mm	22 mg
iodine	1.6 mm	20 mg
tin	1.5 mm	20 mg
titanium	1.6 mm	20 mg
boron	2.0 mm	18 mg
nickel	1.2 mm	15 mg
selenium	1.5 mm	15 mg
chromium	1.3 mm	14 mg
manganese	1.2 mm	12 mg
arsenic	1.1 mm	7 mg
lithium	2.4 mm	7 mg
cesium	1.5 mm	6 mg
mercury	0.8 mm	6 mg
germanium	1.0 mm	5 mg
molybdenum	0.8 mm	5 mg
cobalt	0.7 mm	3 mg
antimony	0.7 mm	2 mg
silver	0.6 mm	2 mg
niobium	0.6 mm	1.5 mg
zirconium	0.54 mm	1 mg
lanthanium	0.51 mm	0.8 mg
gallium	0.49 mm	0.7 mg
tellurium	0.48 mm	0.7 mg
yttrium	0.51 mm	0.6 mg
bismuth	0.37 mm	0.5 mg
thallium	0.35 mm	0.5 mg
indium	0.38 mm	0.4 mg
gold	0.22 mm	0.2 mg
scandium	0.41 mm	0.2 mg
tantalum	0.23 mm	0.2 mg
vanadium	0.26 mm	0.11 mg
thorium	0.20 mm	0.1 mg
uranium	0.17 mm	0.1 mg
samarium	0.19 mm	50 µg
beryllium	0.27 mm	36 µg
tungsten	0.10 mm	20 µg

Data credit:
Ed Uthman, MD
http://web2.airmail.net/uthman/elements_of_body.html

The Elements According to Relative Abundance

on Earth's surface



Colors suggest relative electro-negativity

Tabla periodica de los espectros de emision de los elementos

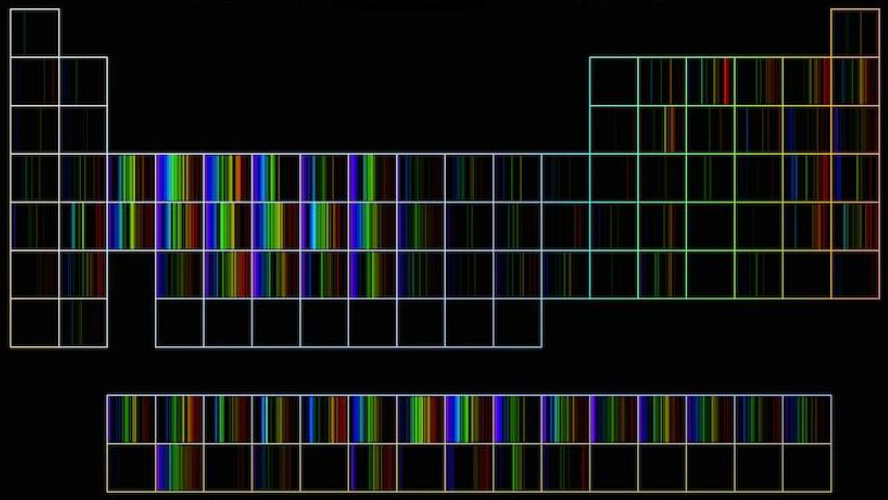
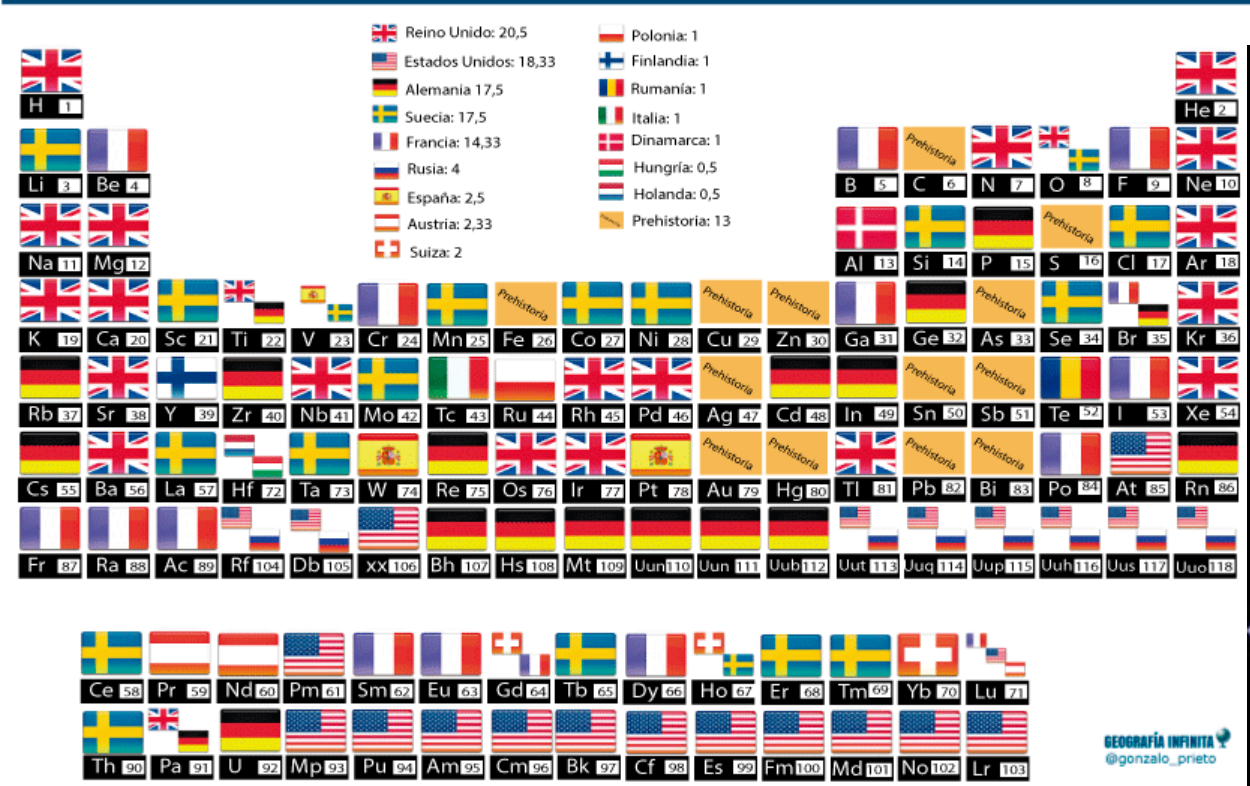
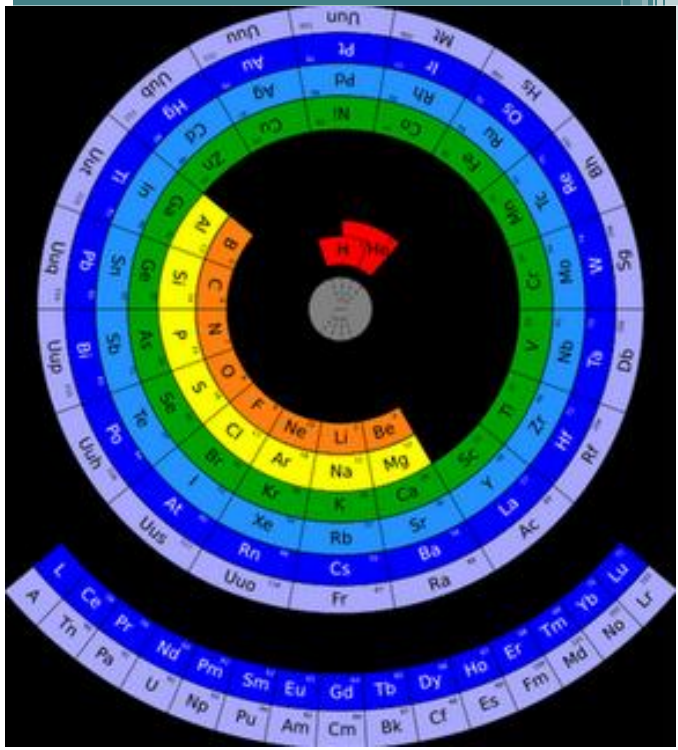
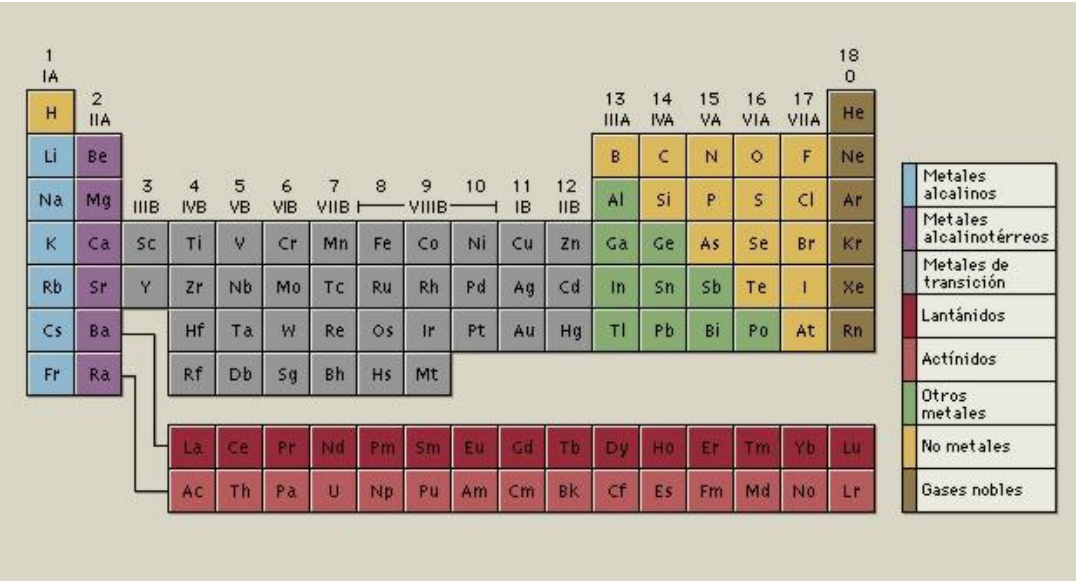


TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS POR PAÍSES







SOBRE EL TAMAÑO DE LAS COSAS ...

Muchas veces escuchamos que las personas somos seres muy pequeños en este universo ya que nuestro tiempo de vida (máximo hasta 100 años y excepcionalmente la persona más longeva 120 años) es corto en comparación con el de una montaña (varios millones de años, de unos 2 hasta 350 millones), un planeta (miles de millones de años) o cualquier estrella como nuestro Sol (unos 4,700 millones de años); nuestro tamaño pues también es muy pequeño en la escala cósmica, basta comparar el tamaño de un ser humano que es menor que 1 m cúbico con el propio planeta Tierra que tiene un volumen que es trillones de veces mayor (10 a la 20) y no se diga con nuestro Sol que sería del orden de cuatrillones de veces el tamaño de un ser humano para darnos cuenta de nuestra pequeñez en la dimensión temporal y espacial.

Podría comentarse el tamaño de una galaxia, su volumen espacial, sus dimensiones, su peso y hasta su contenido en átomos y las cifras serían tan grandes que difícilmente podríamos imaginar su significado.

Sin embargo, desde el punto de vista de la evolución molecular somos gigantes que han acumulado una enorme cantidad de cambios y diferenciaciones (especialización del orden) respecto del resto del universo integrando en nuestro ser, información de toda la historia cósmica, la cual incluye tres generaciones estelares para la constitución de los átomos que nos conforman y que se crean en el interior de las estrellas...

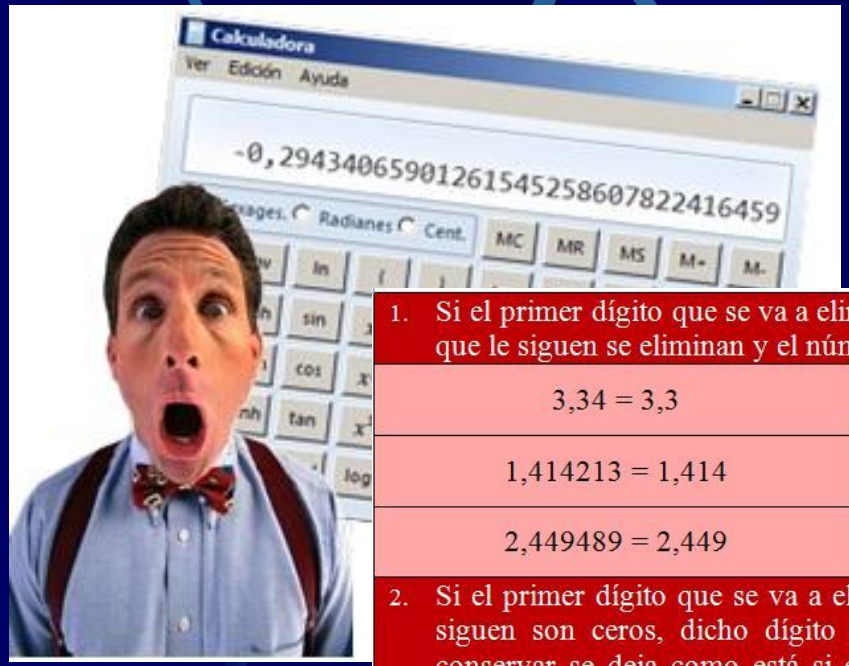
Es tal la complejidad de nuestros sistemas moleculares que tan solo el cerebelo es capaz de producir 50 sustancias diferentes y combinarlas todas en un solo agregado químico, de modo que pueden hacerse 50! (50 factorial) combinaciones prácticamente distintas... En el ADN humano se calcula que hay entre 20 y 25 mil genes con hasta 3 mil millones de pares de bases cuyas variaciones se expresan en la diversidad de nuestra especie. Podría decirse que por el planeta desde hace unos 150 mil años han vivido unos 100 mil millones de seres humanos, ¡lo cual es comparable al número de estrellas en nuestra galaxia! Tan solo hoy en día en el Mundo habitamos más de 7 mil millones de personas, todas únicas.

Pero más aún, en la escala de la evolución molecular el ordenamiento y la variabilidad es tan enorme que sus proporciones se salen de todo límite imaginable permitiendo que emerjan las emociones y las ideas que simplemente son incuantificables y que constituyen sistemas infinitos capaces de contener a su vez otros infinitos.

Así que, desde ese punto de vista, al que llamo la especialización del orden, el ser humano en particular y todos los otros seres vivos superiores somos gigantes cósmicos, por lo que no hay que sentirse pequeños frente al Universo. Esto no debe tomarse como una condición de arrogancia, sino como una realidad con muchas responsabilidades.

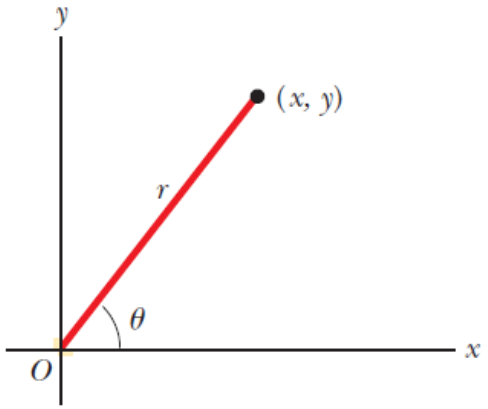
Alejandro Valderrama

Cifras Significativas y Redondeo



1. Si el primer dígito que se va a eliminar es inferior a 5, dicho dígito y los que le siguen se eliminan y el número que queda se deja como está.	
3,34 = 3,3	Redondeado a dos cifras significativas
1,414213 = 1,414	Redondeado a cuatro cifras significativas
2,449489 = 2,449	Redondeado a cuatro cifras significativas
2. Si el primer dígito que se va a eliminar es 5 y todos los dígitos que le siguen son ceros, dicho dígito se elimina y el número que se va a conservar se deja como está si es par o aumenta en una unidad si es impar.	
2,0925 = 2,092	Redondeado a cuatro cifras significativas
61,555 = 61,56	Redondeado a cuatro cifras significativas
3,35 = 3,4	Redondeado a dos cifras significativas

Sistemas Coordenados

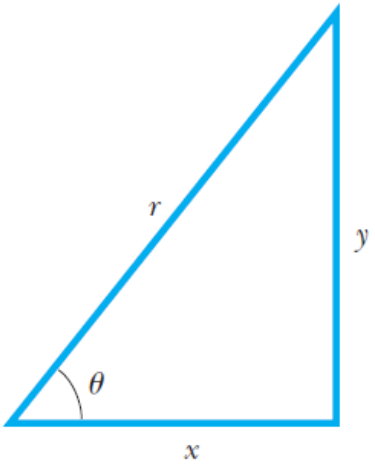


a)

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



b)

Figura 3.2 a) Las coordenadas polares planas de un punto se representan mediante la distancia r y el ángulo θ, donde θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo. b) Se usa el triángulo rectángulo para relacionar (x, y) con (r, θ).

Transformaciones

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \text{ sen } \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

teorema de Pitágoras.

Coordenadas polares

$x = R \cdot \cos(\alpha)$

$y = R \cdot \text{sen}(\alpha)$

$\alpha = \omega \cdot t$

EJEMPLO 3.1 Coordenadas polares

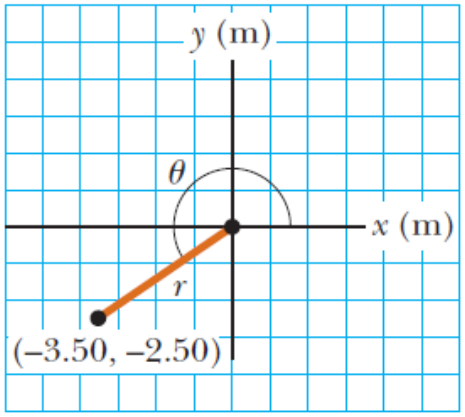
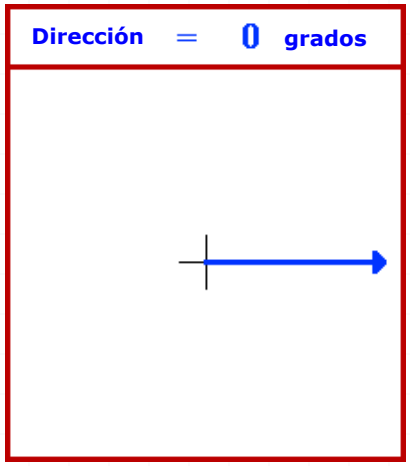


Figura 3.3 (Ejemplo 3.1) Encuentre las coordenadas polares cuando tiene las coordenadas cartesianas.



Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como se muestra en la figura 3.3. Encuentre las coordenadas polares de este punto.

SOLUCIÓN

encontrar r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\text{ m})^2 + (-2.50\text{ m})^2} = 4.30\text{ m}$$

hallar θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\text{ m}}{-3.50\text{ m}} = 0.714$$

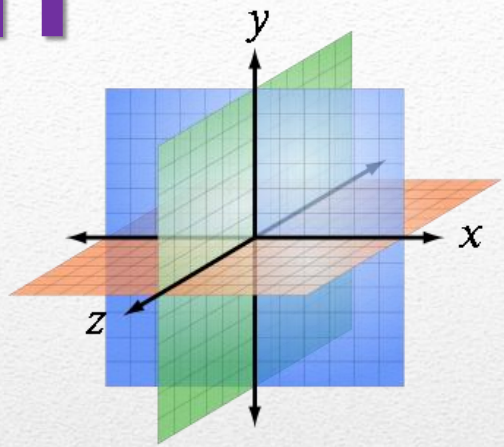
$$\theta = 216^\circ$$

Advierta que debe usar los signos de x y y para encontrar que el punto se encuentra en el tercer cuadrante del sistema coordenado. Esto es, $\theta = 216^\circ$, no 35.5°.

EJEMPLO

? Ser capaz de predecir la trayectoria de un huracán resulta esencial para reducir al mínimo los posibles daños a las propiedades y a las vidas humanas. Si un huracán se mueve a 20 km/h en una dirección de 53° al norte del este, ¿qué tan lejos al norte se moverá el huracán en una hora?

Análisis Vectorial 1



Escalar: es una cantidad que está completamente caracterizada por su magnitud.

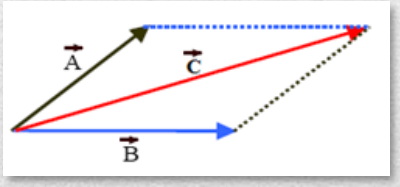
Vector: es una cantidad que está caracterizada por su magnitud y dirección. Usualmente se denota con el tipo de letra *negritas*; es decir, **A**, **B**, **C**, …, o bien, **a**, **b**, **c**, …

Un vector se especifica con sus componentes: $\boldsymbol{V} = (v_x, v_y, v_z)$

La magnitud del vector $\boldsymbol{V}$ es su longitud neta, es decir: $|\boldsymbol{V}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

La suma de dos vectores se define de la siguiente manera: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

De modo que, $c_x = a_x + b_x, \;\; c_y = a_y + b_y, \;\; c_z = a_z + b_z$



Regla del Paralelogramo

Para la operación resta, basta hacer el cambio de signo y observar que el vector resultante es el que corresponde a la diagonal menor en el paralelogramo.

Tanto la suma como la resta de vectores es asociativa: $\boldsymbol{A} \pm (\boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \pm \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$

Multiplicación de un vector por un escalar: Sea $c \in \mathbb{R}$, y $\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ un vector, entonces:

$$c\boldsymbol{A} = (ca_x, ca_y, ca_z)$$

Suma de vectores

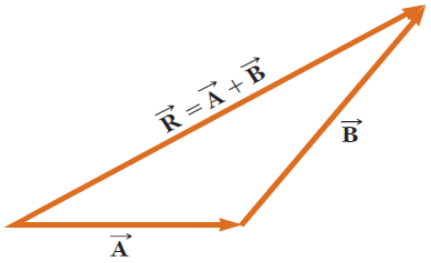


Figura 3.6 Cuando el vector $\vec{B}$ se suma al vector $\vec{A}$, la resultante $\vec{R}$ es el vector que va del origen de $\vec{A}$ a la punta de $\vec{B}$.

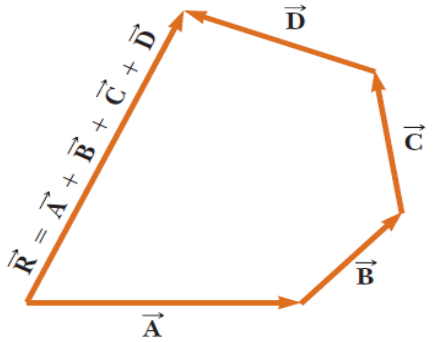


Figura 3.7 Construcción geométrica para sumar cuatro vectores. El vector resultante $\vec{R}$ es por definición el que completa el polígono.

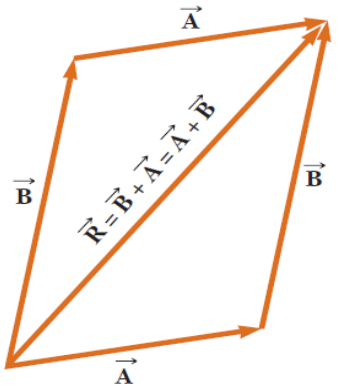


Figura 3.8 Esta construcción muestra que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ o, en otras palabras, que la suma vectorial es conmutativa.

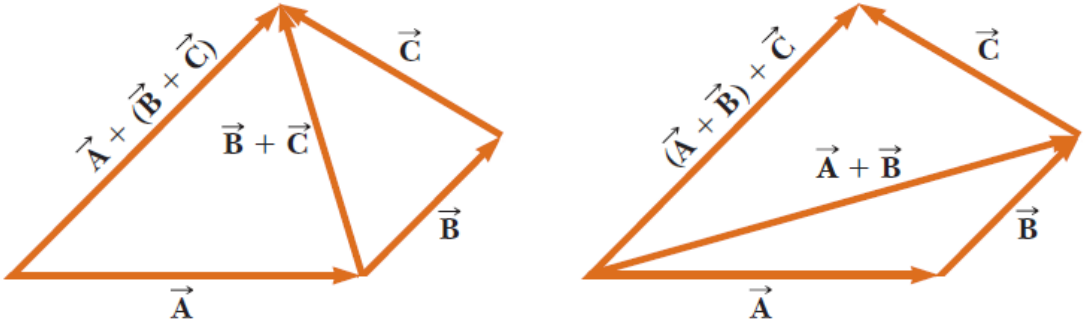
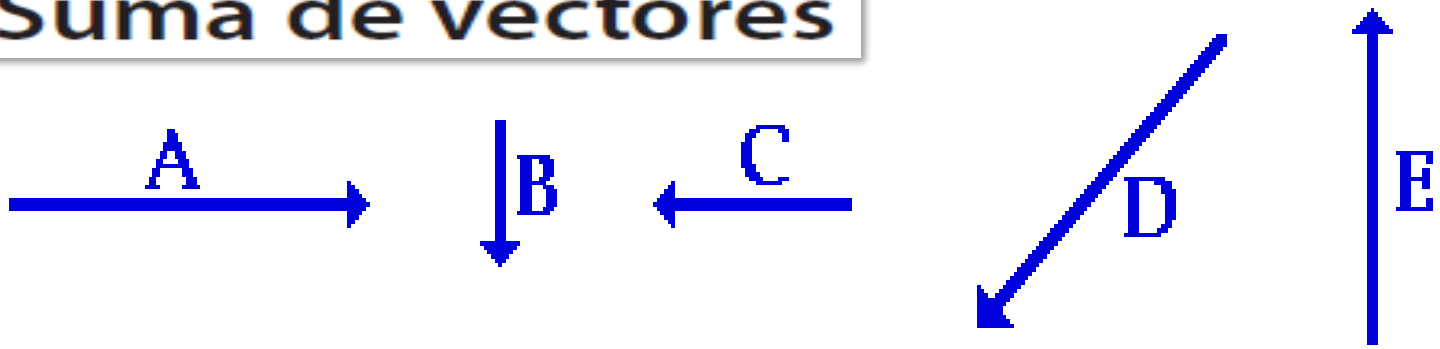


Figura 3.9 Construcciones geométricas para verificar la ley asociativa de la suma.

Suma de vectores



Multiplicación de un vector por un escalar

Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar positiva m, el producto $m\vec{\mathbf{A}}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$ y magnitud mA. Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar negativa $-m$, el producto $-m\vec{\mathbf{A}}$ tiene una dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$. Por ejemplo, el vector $5\vec{\mathbf{A}}$ es cinco veces tan largo como $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$; el vector $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{A}}$ es un tercio la longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$.

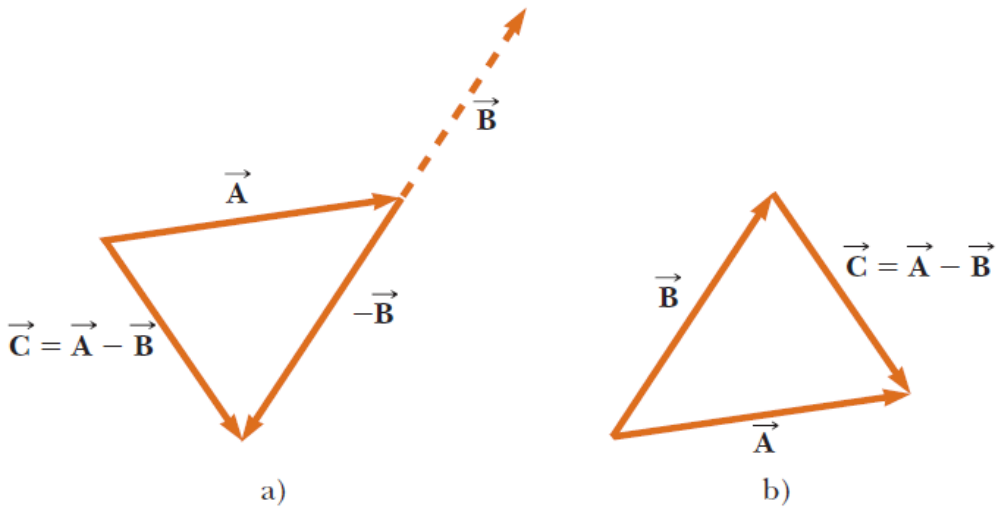


Figura 3.10 a) Esta construcción muestra cómo restar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ del vector $\vec{\mathbf{A}}$. El vector $-\vec{\mathbf{B}}$ es igual en magnitud al vector $\vec{\mathbf{B}}$ y apunta en la dirección opuesta. Para restar $\vec{\mathbf{B}}$ de $\vec{\mathbf{A}}$, aplique la regla de suma vectorial a la combinación de $\vec{\mathbf{A}}$ y $-\vec{\mathbf{B}}$: primero dibuje $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo de algún eje conveniente y luego coloque el origen de $-\vec{\mathbf{B}}$ en la punta de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{C}$ es la diferencia $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$. b) Una segunda forma de observar la resta vectorial. El vector diferencia $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ es el vector que se debe sumar a $\vec{\mathbf{B}}$ para obtener $\vec{\mathbf{A}}$.

EJEMPLO 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

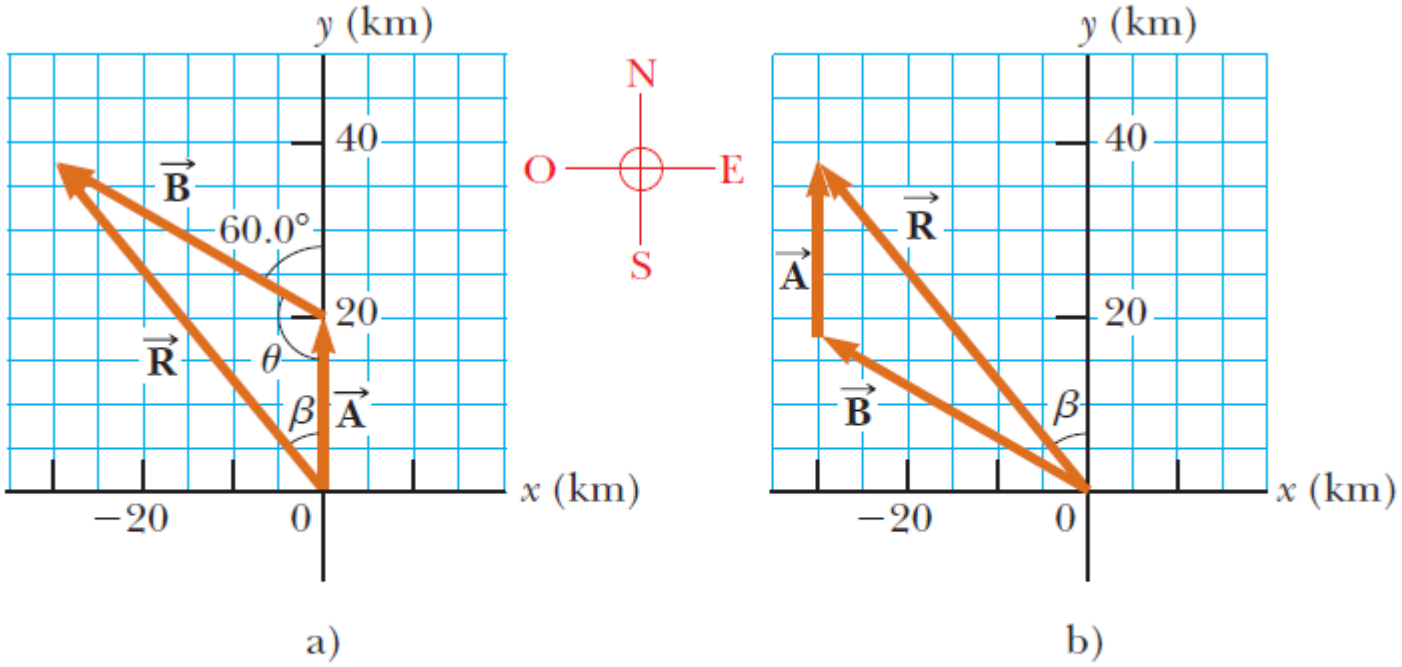


Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. b) Sumar los vectores en orden inverso ($\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$) da el mismo resultado para $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Sustituya valores numéricos y advierta que $\theta = 180° - 60° = 120°$:

$$R = \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$
$$= 48.2\text{ km}$$

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ medida desde la dirección norte:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\operatorname{sen}120° = 0.629$$

$$\beta = 38.9°$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

Resumen

DEFINICIONES

Las **cantidades escalares** son las que sólo tienen un valor numérico y no tienen dirección asociada. Las **cantidades vectoriales** tienen tanto magnitud como dirección y obedecen las leyes de la suma vectorial. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Cuando se suman dos o más vectores, deben tener las mismas unidades y todos ellos deben ser del mismo tipo de cantidad. Se pueden sumar gráficamente dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. En este método (figura 3.6), el vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ corre del origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

Un segundo método de suma de vectores involucra las **componentes** de los vectores. La componente x A_x del vector $\vec{\mathbf{A}}$ es igual a la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje x de un sistema coordenado, donde $A_x = A \cos \theta$. La componente y A_y de $\vec{\mathbf{A}}$ es la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje y, donde $A_y = A \operatorname{sen} \theta$.

Si un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una componente x A_x y una componente y A_y, el vector se expresa en forma de vector unitario como $\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}}$. En esta notación, $\hat{\mathbf{i}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección x positiva y $\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección y positiva. Puesto que $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores unitarios, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = 1$.

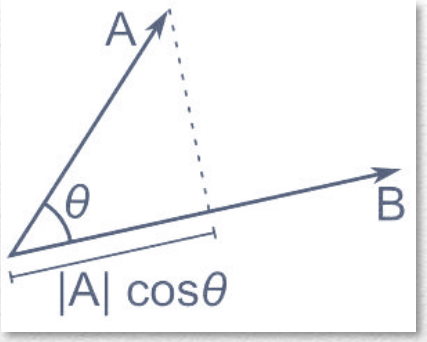
El resultante de dos o más vectores se encuentra al descomponer todos los vectores en sus componentes x y y, sumar sus componentes resultantes x y y, y luego usar el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud del vector resultante. Se puede encontrar el ángulo que forma el vector resultante respecto del eje x al usar una función trigonométrica adecuada.

Productos vectoriales

Producto Interno: también conocido como producto escalar o producto punto, es el resultado de sumar el producto de las componentes de dos vectores; es decir:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta$$

Donde θ es el ángulo entre los dos vectores.



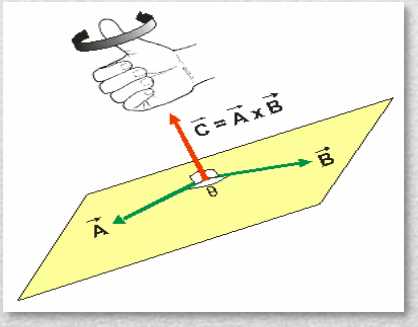
Producto Interior

Producto Exterior: también conocido como producto cruz, el resultado es un vector perpendicular a los vectores que se multiplican.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

$$\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \, sen\, \alpha$$



Producto Cruz

Análisis Vectorial 2

Campos vectoriales y escalares

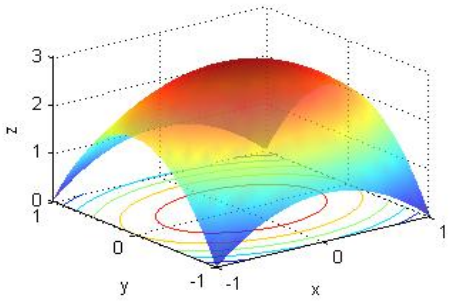
Definiciones:

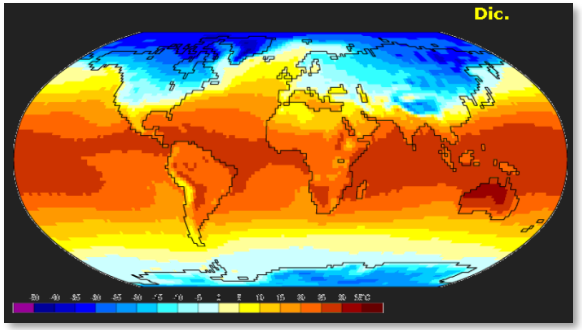
- Un *campo escalar* en el espacio es una aplicación $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R};\ n = 2,3.$

  Asigna a cada punto (x, y, z) de su dominio $\boldsymbol{A}$ un escalar $F(x, y, z) = z.$

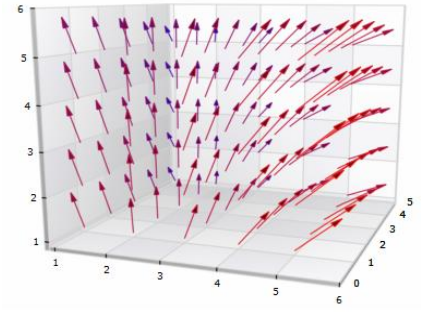
- Un *campo vectorial* en el espacio $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$

  Asigna a cada punto (x, y, z) de su dominio $\boldsymbol{A}$ un vector $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (f_x, f_z, f_z).$





Campos Escalares de Temperatura en 2D y 3D



Campo Vectorial 3D

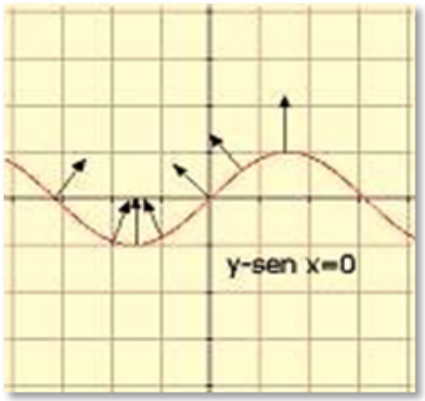
Operadores Diferenciales

Gradiente de un campo escalar, derivada direccional

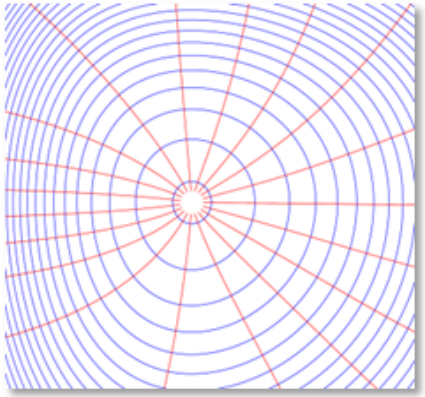
Definición: Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el *gradiente* de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

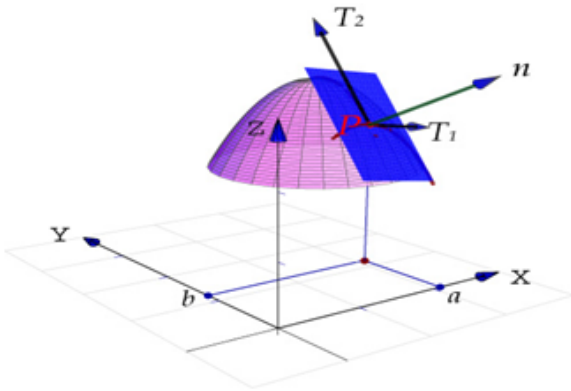
El gradiente es un vector que se encuentra normal (perpendicular) a la tangente de la función en cada punto e indica la dirección en la cual el campo varía más rápidamente.



El gradiente es normal a la curva de nivel.



Función gradiente de un campo central.



Gradiente de una función escalar.

Operadores Diferenciales

Divergencia de un Campo Vectorial

Definición: Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ su divergencia es:

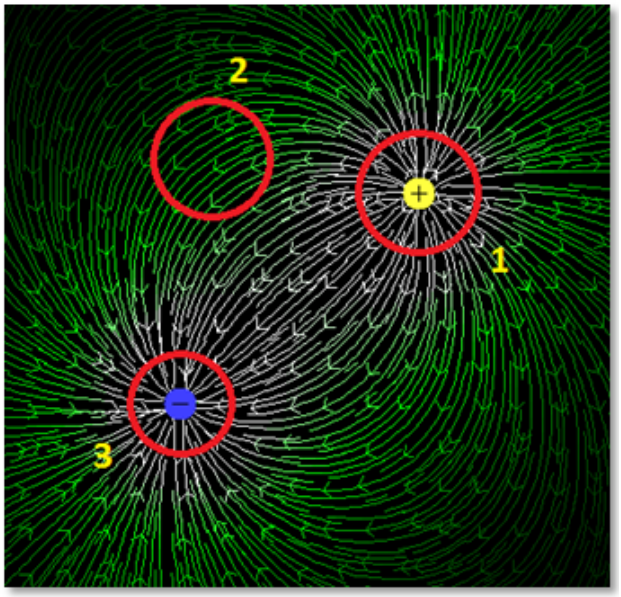
$$\boldsymbol{Div\, F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control.

Si el campo tiene "fuentes" $\boldsymbol{Div\, F > 0}$

y si tiene "sumideros" $\boldsymbol{Div\, F < 0}$.

Líneas de Campo Eléctrico



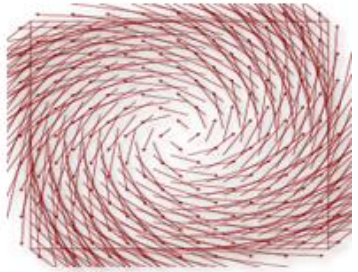
1. **Flujo saliente.**
2. **$Div\, F = 0$**
3. **Flujo entrante.**

Operadores Diferenciales

Rotacional de un Campo Vectorial

Definición: Si $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ entonces su rotacional es el campo vectorial:

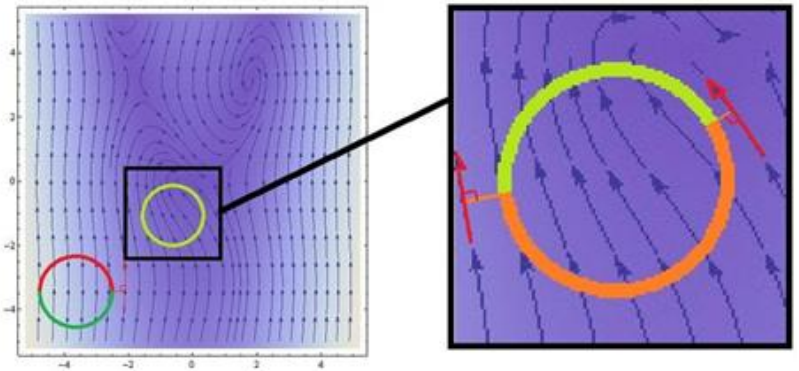
$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Este operador vectorial muestra la tendencia de un campo vectorial (usualmente representativo de un fluido) a inducir rotación alrededor de un punto.

La dirección de rotación estará dada por la *regla de la mano derecha*.

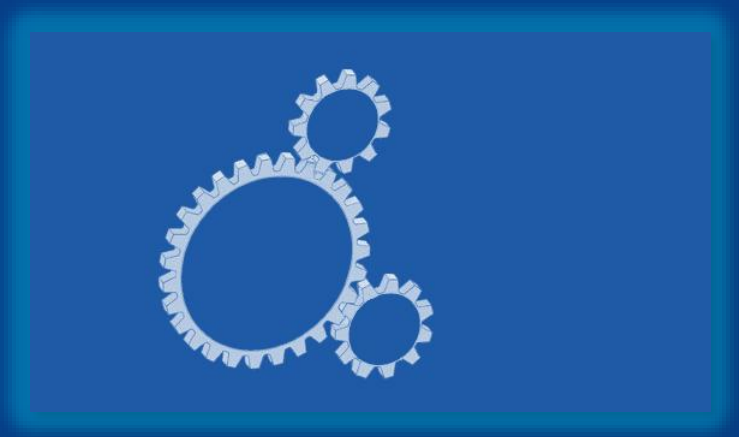
Si su valor es igual a cero en un punto significa que está libre de rotaciones en ese punto.



Diciembre, 2014.

MECÁNICA VECTORIAL

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES



Facultad de Ciencias

M. en C. Alejandro Valderrama

DOCTOR EN TECNOLOGÍA AVANZADA

Contenido

DECLARATIVO

I. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.

1. Conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
2. Movimiento rectilíneo uniforme: aceleración en función del tiempo, la posición y la velocidad.
3. Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares; componentes tangencial y normal.
4. Movimiento relativo a un sistema de referencia de traslación.

Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

Movimiento en dos dimensiones

- Vectores de posición, velocidad y aceleración
- Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante
- Movimiento de proyectil
- Partícula en movimiento circular uniforme
- Aceleraciones tangencial y radial
- Velocidad y aceleración relativas

Conocer lo básico del movimiento bidimensional permitirá examinar una diversidad de movimientos que van desde el movimiento de satélites en orbita al movimiento de electrones en un campo eléctrico uniforme.

Vectores de posición, velocidad y aceleración

vector desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$

velocidad promedio $\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}} \equiv \dfrac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$

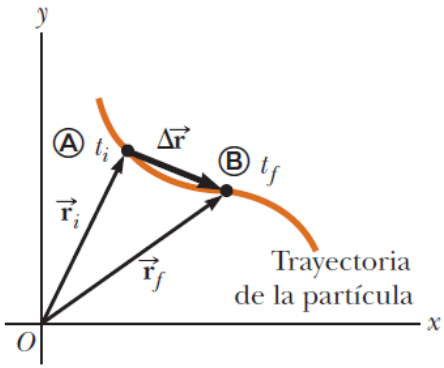


Figura 4.1 Una partícula que se mueve en el plano *xy* se ubica con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen hasta la partícula. El desplazamiento de la partícula conforme se mueve de Ⓐ a Ⓑ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es igual al vector $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$.

velocidad instantánea $\vec{\mathbf{v}}$

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

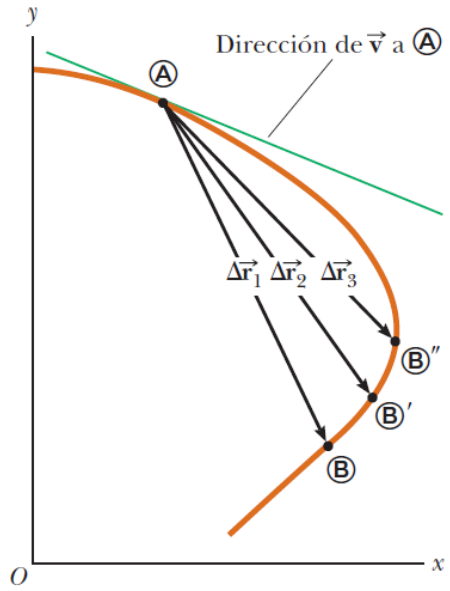


Figura 4.2 A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. Una vez que el punto final de la trayectoria se mueve de Ⓑ a Ⓑ′ a Ⓑ″, el desplazamiento respectivo y los correspondientes intervalos de tiempo se vuelven más y más pequeños. En el límite, cuando el punto final se aproxima a Ⓐ, Δt tiende a cero y la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ tiende a la línea tangente a la curva en Ⓐ. Por definición, la velocidad instantánea en Ⓐ se dirige a lo largo de esta línea tangente.

aceleración promedio

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

aceleración instantánea

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

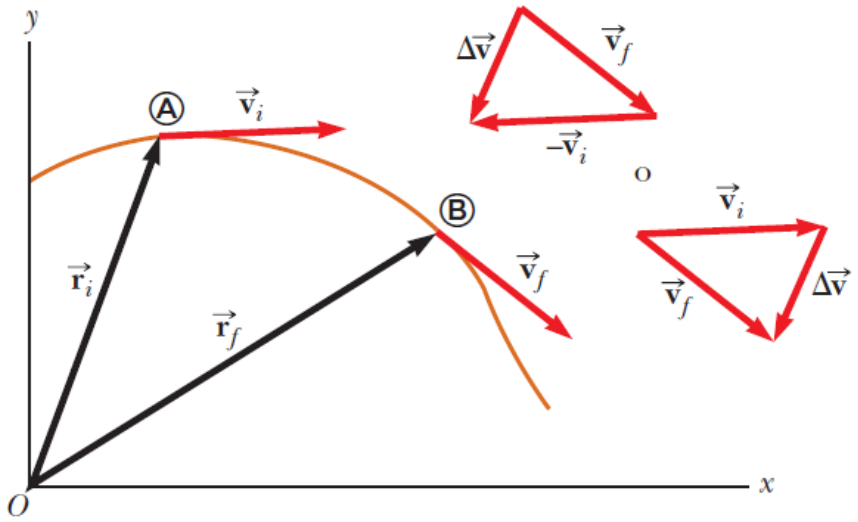


Figura 4.3 Una partícula se mueve de la posición Ⓐ a la posición Ⓑ. Su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. Los diagramas vectoriales arriba a la derecha muestran dos formas de determinar el vector $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ de las velocidades inicial y final.

Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

Ahora considere el movimiento bidimensional durante el cual la aceleración de una partícula permanece constante tanto en magnitud como en dirección.

El movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos independientes en cada una de las dos direcciones perpendiculares asociadas con los ejes x y y.

Esto es: cualquier influencia en la dirección y no afecta el movimiento en la dirección x y viceversa.

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}} = (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t$$

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t$$

◀ Vector velocidad como función del tiempo

las coordenadas x y y de una partícula
que se mueve con aceleracion constante son

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}}$$
$$= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \tfrac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$$

◀ Vector de posición como función del tiempo

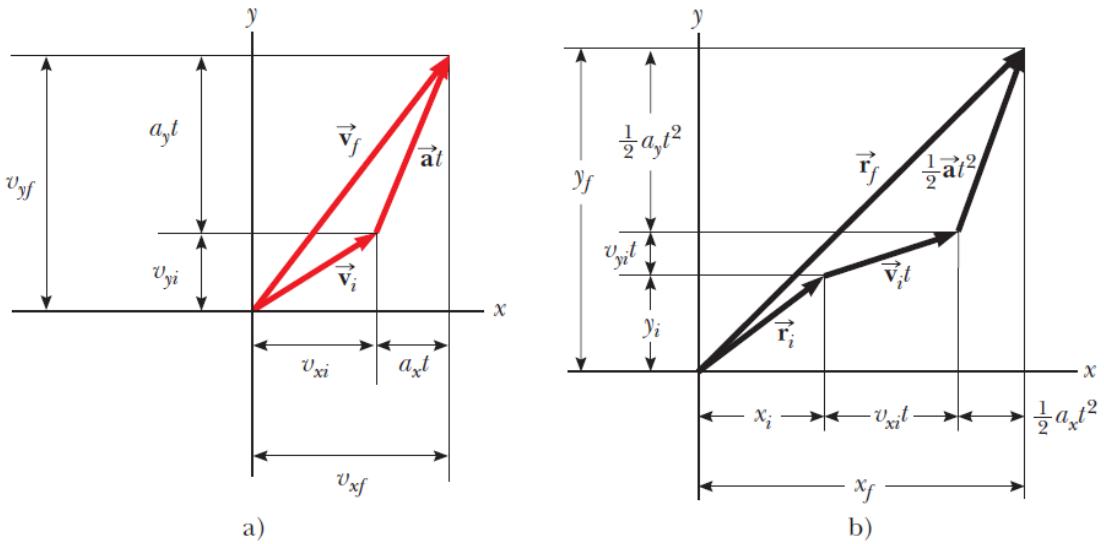


Figura 4.5 Representaciones y componentes vectoriales de a) la velocidad y b) la posición de una partícula que se mueve con una aceleración constante $\vec{\mathbf{a}}$.

EJEMPLO 4.1 Movimiento en un plano

Una partícula parte del origen en $t = 0$ con una velocidad inicial que tiene una componente x de 20 m/s y otra componente y de -15 m/s. La partícula se mueve en el plano xy sólo con una componente x de aceleración, dada por $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$.

A) Determine el vector velocidad total en cualquier tiempo.

B) Calcule la velocidad y la rapidez de la partícula en $t = 5.0$ s.

C) Determine las coordenadas x y y de la partícula en cualquier tiempo t y su vector de posición en este tiempo.

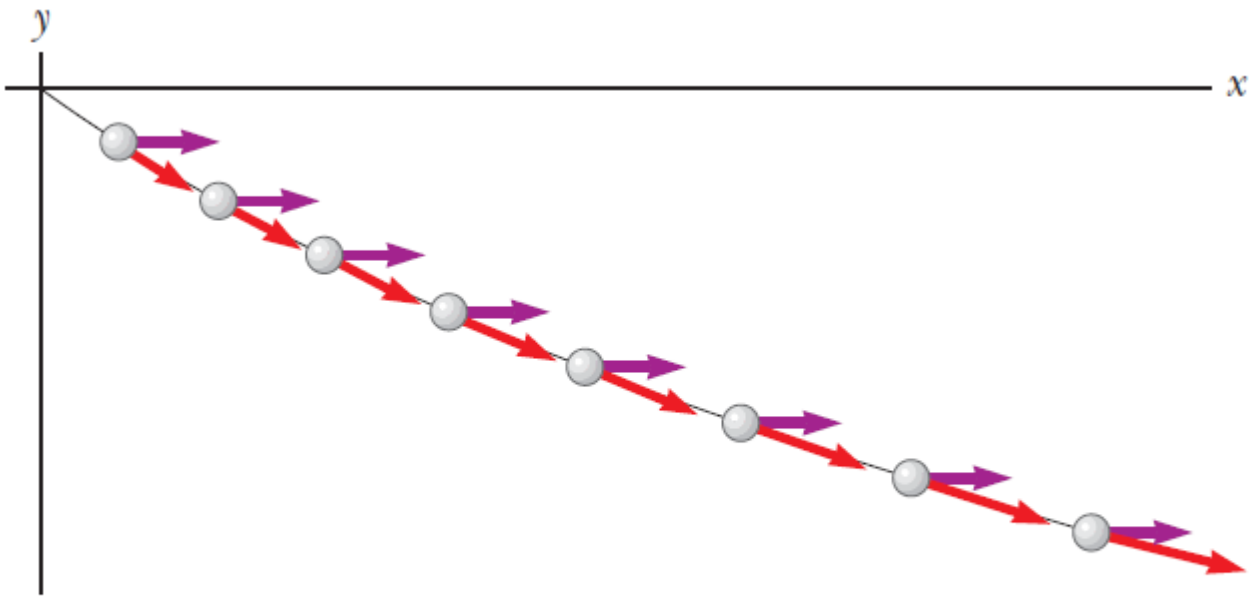


Figura 4.6 (Ejemplo 4.1) Diagrama de movimiento para la partícula.

SOLUCIÓN

A)

Analizar Para comenzar el análisis matemático, se hace $v_{xi} = 20\ \text{m/s}$, $v_{yi} = -15\ \text{m/s}$, $a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$ y $a_y = 0$.

Aplique la ecuación 4.8 para el vector velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t = (v_{xi} + a_x t)\,\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [20\ \text{m/s} + (4.0\ \text{m/s}^2)t]\,\hat{\mathbf{i}} + [-15\ \text{m/s} + (0)t]\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$(1)\quad \vec{\mathbf{v}}_f = [(20 + 4.0t)\,\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}]\ \text{m/s}$$

B)

Analizar

Evalúe el resultado de la ecuación (1) en $t = 5.0$ s:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = [(20 + 4.0(5.0))\,\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}]\ \text{m/s} = (40\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$$

Determine el ángulo θ que $\vec{\mathbf{v}}_f$ forma con el eje x en $t = 5.0$ s:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15\ \text{m/s}}{40\ \text{m/s}}\right) = -21°$$

Evalúe la rapidez de la partícula como la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}_f$:

$$v_f = |\vec{\mathbf{v}}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2}\ \text{m/s} = 43\ \text{m/s}$$

C)

Analizar

Aplique las componentes de la ecuación 4.9 con $x_i = y_i = 0$ en $t = 0$:

$$x_f = v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = (20t + 2.0t^2)\ \text{m}$$

$$y_f = v_{yi}t = (-15t)\ \text{m}$$

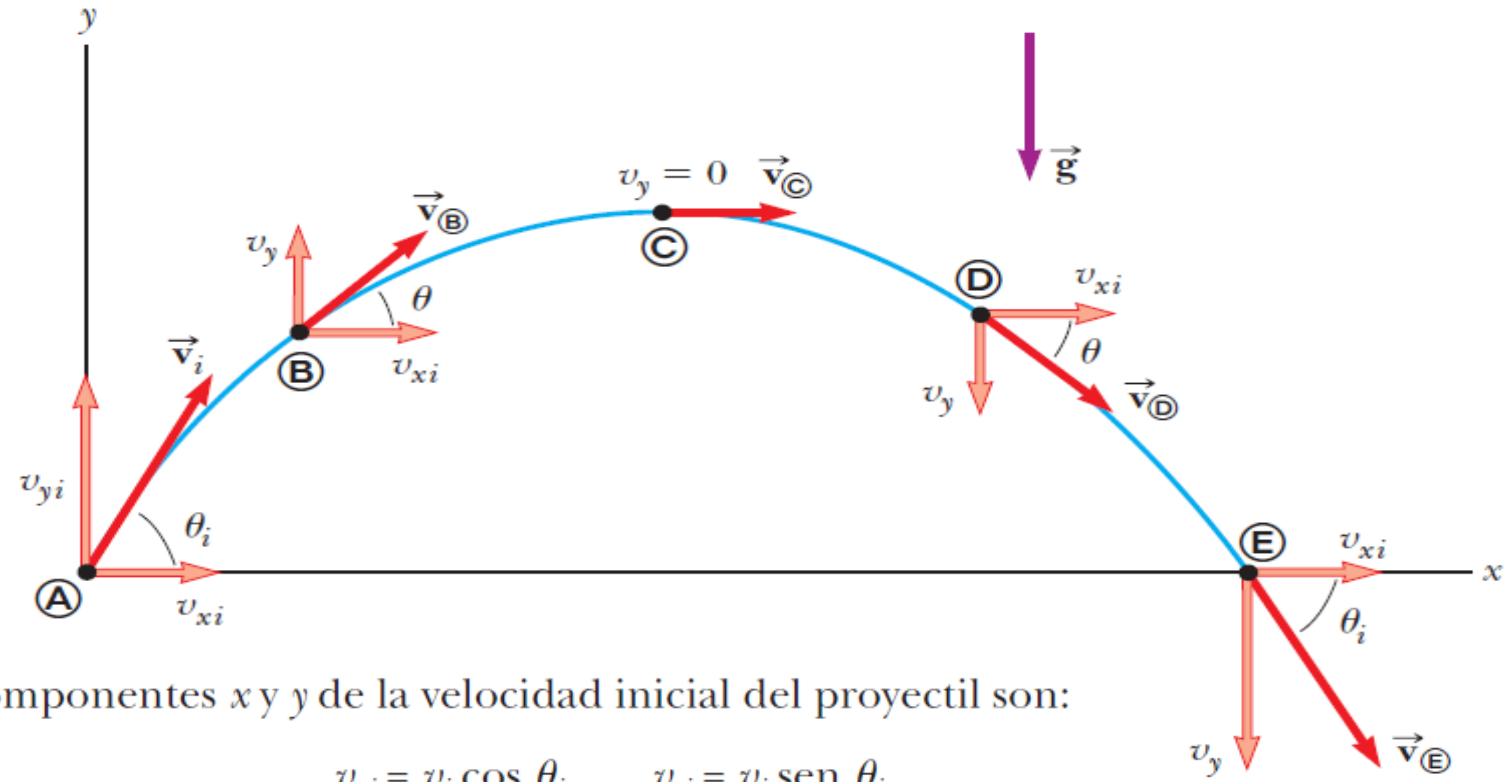
Exprese el vector de posición de la partícula en cualquier tiempo t:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = x_f\hat{\mathbf{i}} + y_f\hat{\mathbf{j}} = [(20t + 2.0t^2)\,\hat{\mathbf{i}} - 15t\hat{\mathbf{j}}]\ \text{m}$$

Finalizar Considere ahora un caso límite para valores muy grandes de t.

Movimiento de proyectil

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$$



donde las componentes x y y de la velocidad inicial del proyectil son:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad v_{yi} = v_i \operatorname{sen}\theta_i$$

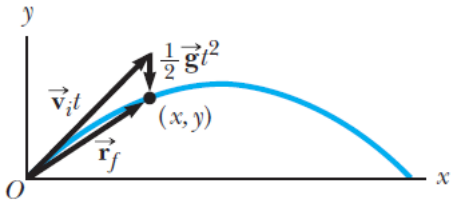


Figura 4.8 Vector de posición $\vec{r}_f$ de un proyectil lanzado desde el origen, cuya velocidad inicial en el origen es $\vec{v}_i$. El vector $\vec{v}_i t$ sería el desplazamiento del proyectil si no hubiera gravedad, y el vector $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ es su desplazamiento vertical de una trayectoria recta debido a su aceleración gravitacional descendente.

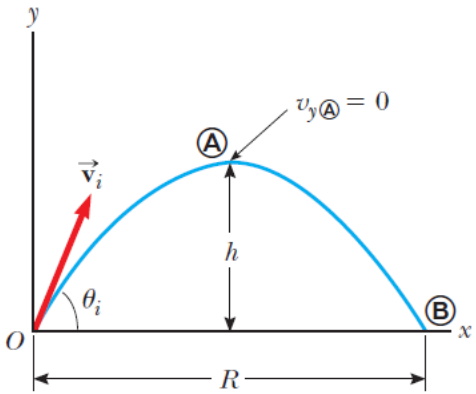


Figura 4.9 Proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen en $t_i = 0$ con una velocidad inicial $\vec{v}_i$. La altura máxima del proyectil es h y el alcance horizontal es R. En Ⓐ, el máximo de la trayectoria, la partícula tiene coordenadas $(R/2, h)$.

Pregunta rápida 4.2 **i)** A medida que un proyectil lanzado hacia arriba se mueve en su trayectoria parabólica (como en la figura 4.8), ¿en qué punto a lo largo de su trayectoria los vectores velocidad y aceleración del proyectil son mutuamente perpendiculares? a) en ninguna parte, b) en el punto más alto, c) en el punto de lanzamiento. **ii)** Con las mismas opciones, ¿en qué punto son paralelos los vectores velocidad y aceleración del proyectil?

Alcance horizontal y altura máxima de un proyectil

Considere que un proyectil es lanzado desde el origen en $t_i = 0$ con una componente v_{yi} positiva, como se muestra en la figura 4.9, y regresa al mismo nivel horizontal. Dos puntos son de especial interés para analizar: el punto máximo Ⓐ, que tiene coordenadas cartesianas $(R/2, h)$, y el punto Ⓑ, que tiene coordenadas $(R, 0)$. La distancia R se llama *alcance horizontal* del proyectil, y la distancia h es su *altura máxima*. Encuentre h y R matemáticamente a partir de v_i, θ_i y g.

Se puede determinar h al notar que, en el máximo, $v_{y\text{Ⓐ}} = 0$. Debido a esto, se puede usar la componente y de la ecuación 4.8 para determinar el tiempo $t_\text{Ⓐ}$ en que el proyectil alcanza el pico:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

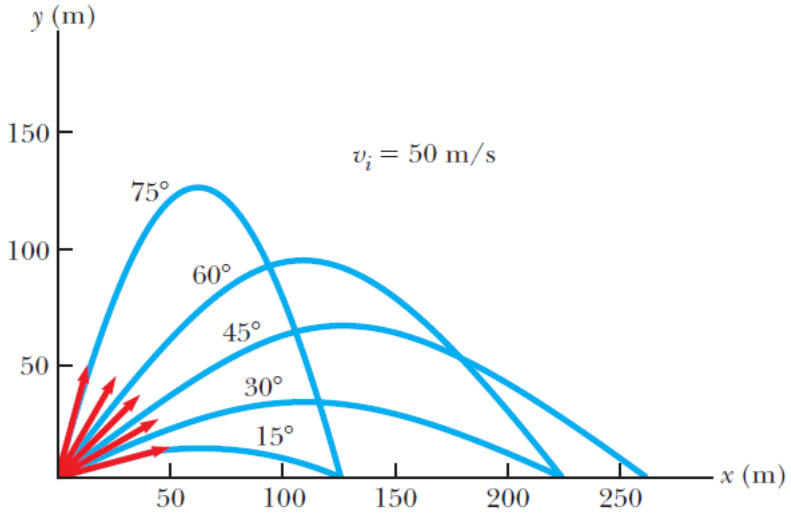
$$0 = v_i \operatorname{sen}\theta_i - g t_\text{Ⓐ}$$

$$t_\text{Ⓐ} = \frac{v_i \operatorname{sen}\theta_i}{g}$$

Al sustituir esta expresión para $t_\text{Ⓐ}$ en la componente y de la ecuación 4.9 y sustituir $y = y_\text{Ⓐ}$ con h, se obtiene una expresión para h en términos de la magnitud y dirección del vector velocidad inicial:

$$h = (v_i \operatorname{sen}\theta_i)\frac{v_i \operatorname{sen}\theta_i}{g} - \tfrac{1}{2} g\left(\frac{v_i \operatorname{sen}\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2\theta_i}{2g}$$



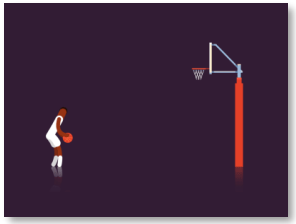


Figura 4.10 Un proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s en varios ángulos de proyección. Note que valores complementarios de θ_i resultan en el mismo valor de R (alcance del proyectil).

El alcance R es la posición horizontal del proyectil en el tiempo que es el doble del tiempo en el que alcanza su máximo, esto es, un tiempo $t_{Ⓑ} = 2t_{Ⓐ}$. Al usar la componente x de la ecuación 4.9, note que $v_{xi} = v_{xⒷ} = v_i \cos \theta_i$ y establezca $x_{Ⓑ} = R$ en $t = 2t_{Ⓐ}$, se encuentra que

$$R = v_{xi} t_{Ⓑ} = (v_i \cos \theta_i) 2t_{Ⓐ}$$

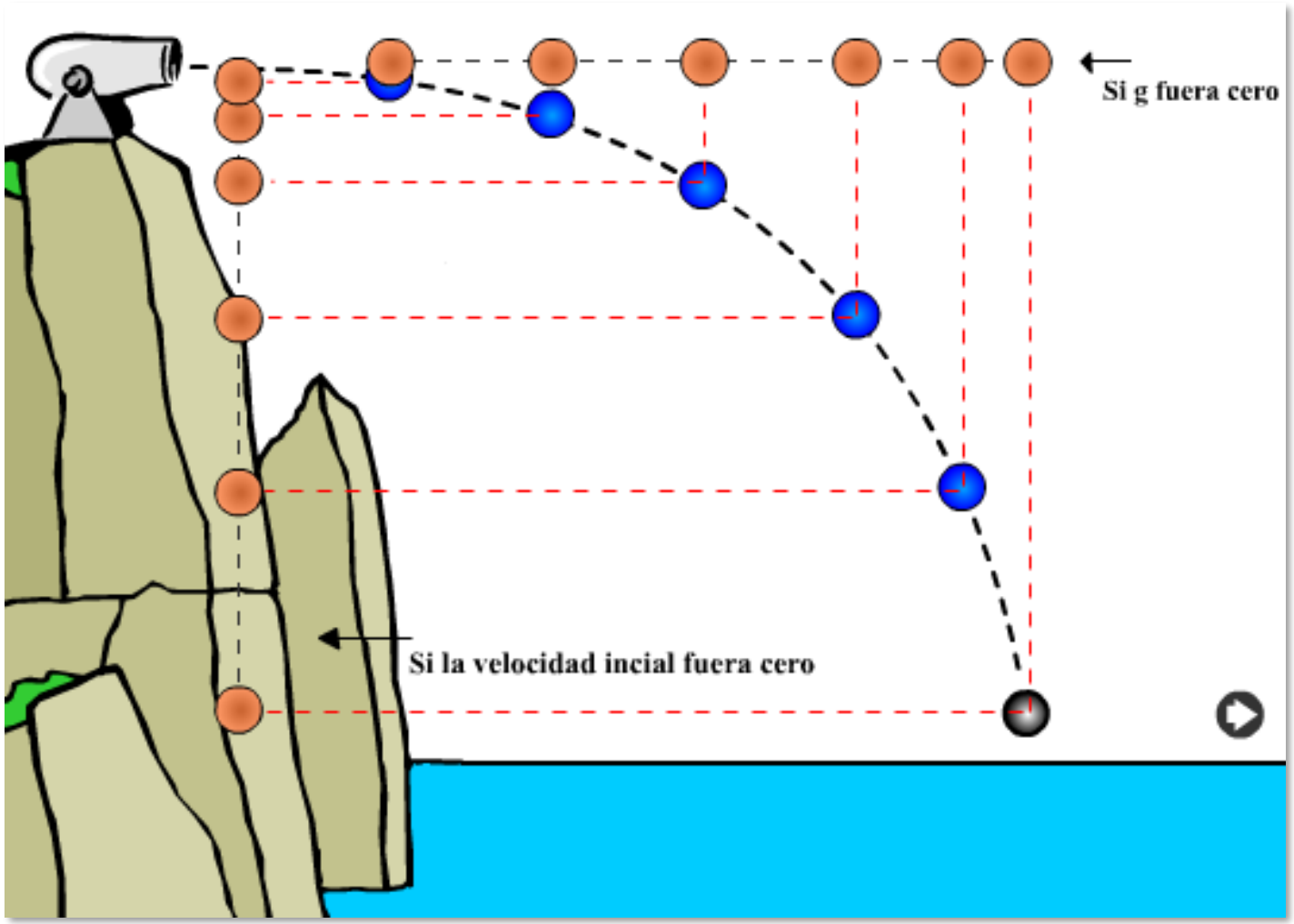
$$= (v_i \cos \theta_i) \frac{2v_i \operatorname{sen} \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \operatorname{sen} \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

Al aplicar la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ (véase el apéndice B.4) se puede escribir R en la forma más compacta

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g}$$

El valor máximo de R a partir de la ecuación 4.13 es $R_{\text{máx}} = v_i^2/g$. Este resultado tiene sentido porque el valor máximo de $\operatorname{sen} 2\theta_i$ es 1, lo que ocurre cuando $2\theta_i = 90°$. Debido a esto, R es un máximo cuando $\theta_i = 45°$.

Tiro Parabólico



EJEMPLO 4.2 Salto de longitud

Un atleta que participa en salto de longitud (figura 4.11) deja el suelo a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal y con una rapidez de 11.0 m/s.

A) ¿Qué distancia salta en la dirección horizontal?

B) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

Mike Powell/Allsport/Getty Images

Figura 4.11 (Ejemplo 4.2) Mike Powell, actual poseedor del récord mundial de salto de longitud de 8.95 m.

SOLUCIÓN

A)

Analizar

Aplique la ecuación 4.13 para encontrar el alcance del saltador:

$$R = \frac{v_i^2 \operatorname{sen} 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2 \operatorname{sen} 2(20.0^\circ)}{9.80 \text{ m/s}^2} = 7.94 \text{ m}$$

B)

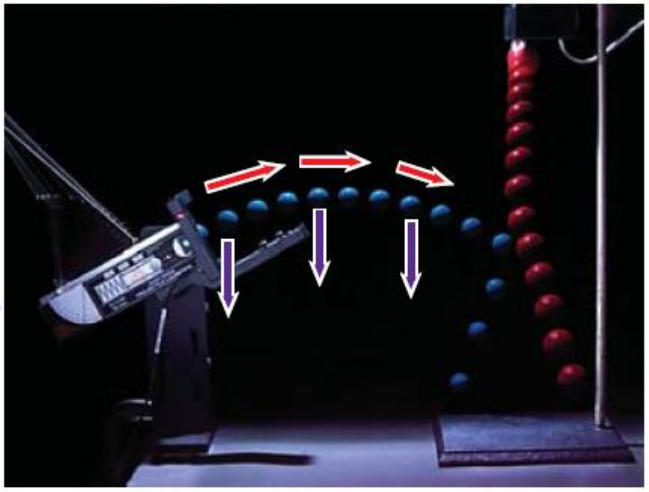
Analizar

Encuentre la altura máxima alcanzada mediante la ecuación 4.12:

$$h = \frac{v_i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i}{2g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2 (\operatorname{sen} 20.0^\circ)^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = 0.722 \text{ m}$$

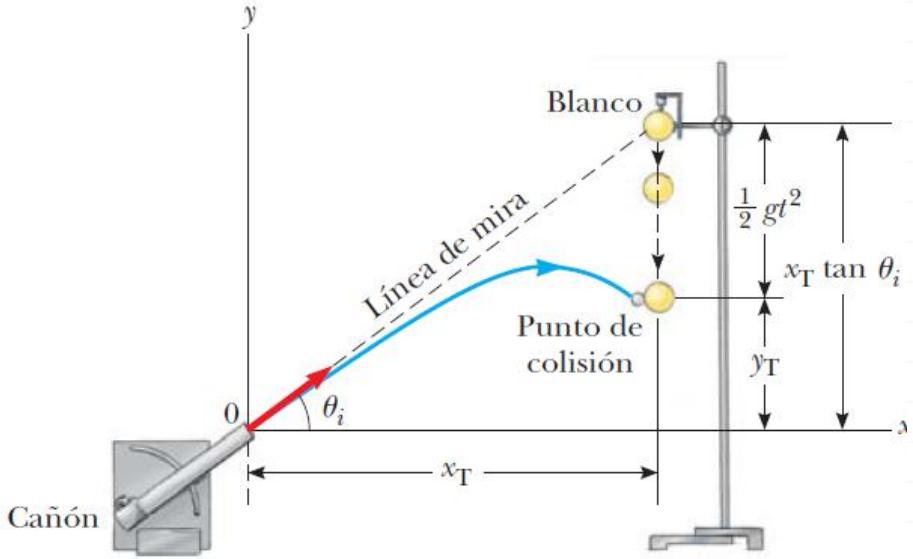
EJEMPLO 4.3 Tiro que da en el objetivo en cada ocasión

En una popular demostración, se dispara un proyectil a un objetivo en tal forma que el proyectil sale del cañón al mismo tiempo que el objetivo se suelta del reposo. Demuestre que, si el cañón se apunta inicialmente al objetivo fijo, el proyectil golpea al objetivo que cae como se muestra en la figura 4.12a.



© Thomson Learning/Charles D. Winters

a)



b)

Figura 4.12 (Ejemplo 4.3) a) Fotografía estroboscópica de la demostración proyectil–objetivo. Si el cañón se apunta directamente al objetivo y se dispara en el mismo instante cuando el objetivo comienza a caer, el proyectil golpeará el objetivo. Advierta que la velocidad del proyectil (flechas rojas) cambia en dirección y magnitud, mientras su aceleración descendente (flechas violetas) permanece constante. b) Diagrama esquemático de la demostración proyectil–objetivo.

SOLUCIÓN

Analizar El objetivo T se representa como una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. La figura 4.12b muestra que la coordenada y inicial y_{iT} del objetivo es $x_T \tan \theta_i$ y su velocidad inicial es cero. Cae con aceleración $a_y = -g$. El proyectil P se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección y y una partícula bajo velocidad constante en la dirección x.

Escriba una expresión para la coordenada y del objetivo en cualquier momento después de liberarse y observe que su velocidad inicial es cero:

$$1) \quad y_T = y_{iT} + (0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada y del proyectil en cualquier momento:

$$2) \quad y_P = y_{iP} + v_{yiP}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 + (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada x del proyectil en cualquier momento:

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP}t = 0 + (v_{iP} \cos \theta_i)t = (v_{iP} \cos \theta_i)t$$

Resuelva esta expresión para el tiempo como función de la posición horizontal del proyectil:

$$t = \frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 2):

$$3) \quad y_P = (v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i)\left(\frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}\right) - \tfrac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \theta_i - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Compare las ecuaciones 1) y 3). Se ve que, cuando las coordenadas x del proyectil y el objetivo son las mismas (esto es, cuando $x_T = x_P$), sus coordenadas y conocidas por las ecuaciones 1) y 3) son las mismas y resulta una colisión.

Finalizar Note que una colisión sólo resulta cuando $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i \geq \sqrt{gd/2}$, donde d es la elevación inicial del objetivo arriba del suelo. Si $v_{iP} \operatorname{sen} \theta_i$ es menor que este valor, el proyectil golpea el suelo antes de alcanzar el objetivo.

EJEMPLO 4.4 ¡Vaya brazo!

Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio, a un ángulo de 30.0° con la horizontal, y con una rapidez inicial de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 4.13. La altura del edificio es de 45.0 m.

A) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?

B) ¿Cuál es la rapidez de la piedra justo antes de golpear el suelo?

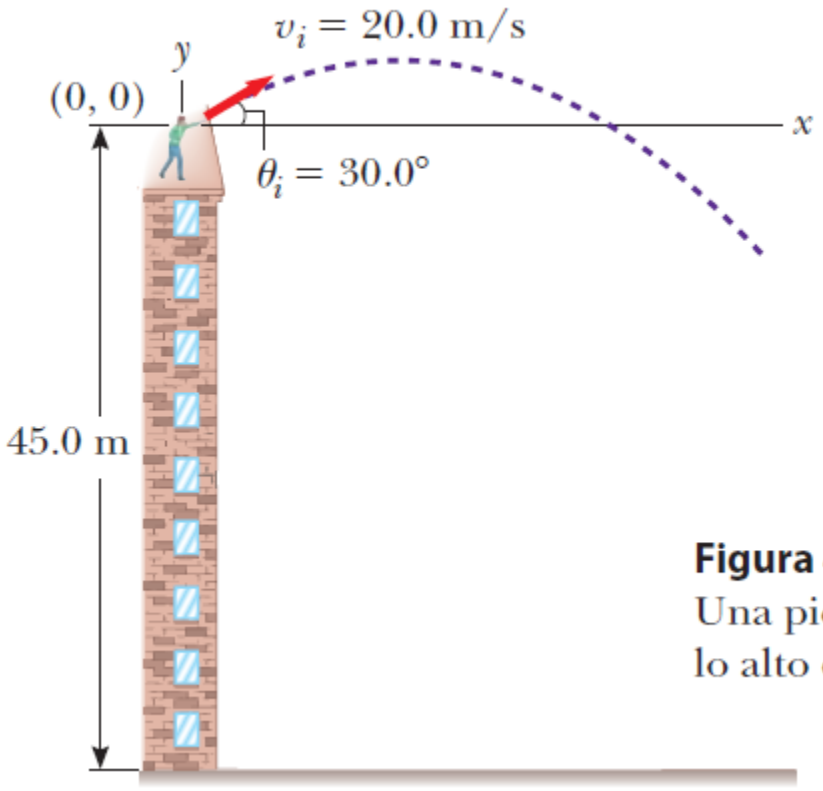


Figura 4.13 (Ejemplo 4.4) Una piedra es lanzada desde lo alto de un edificio.

SOLUCIÓN

A)

Analizar Se tiene la información $x_i = y_i = 0$, $y_f = -45.0$ m, $a_y = -g$ y $v_i = 20.0$ m/s (el valor numérico de y_f es negativo porque se eligió lo alto del edificio como el origen).

Encuentre las componentes x y y iniciales de velocidad de la piedra:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = (20.0 \text{ m/s})\cos 30.0^\circ = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \operatorname{sen}\theta_i = (20.0 \text{ m/s})\operatorname{sen} 30.0^\circ = 10.0 \text{ m/s}$$

Exprese la posición vertical de la piedra a partir de la componente vertical

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$-45.0 \text{ m} = 0 + (10.0 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Resuelva la ecuación cuadrática para t:

$$t = 4.22 \text{ s}$$

B)

Use la componente y de la ecuación 4.8 con $t = 4.22$ s para obtener la componente y de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{yf} = 10.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.3 \text{ m/s}$$

Use esta componente con la componente horizontal $v_{xf} = v_{xi} = 17.3$ m/s para encontrar la rapidez de la piedra en $t = 4.22$ s:

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(17.3 \text{ m/s})^2 + (-31.3 \text{ m/s})^2} = 35.8 \text{ m/s}$$

EJEMPLO 4.5 El final del salto con esquíes

Una esquiadora deja la rampa y se desliza en la dirección horizontal con una rapidez de 25.0 m/s, como se muestra en la figura 4.14. El plano de aterrizaje bajo ella cae con una pendiente de 35.0°. ¿Dónde aterrizará en el plano?

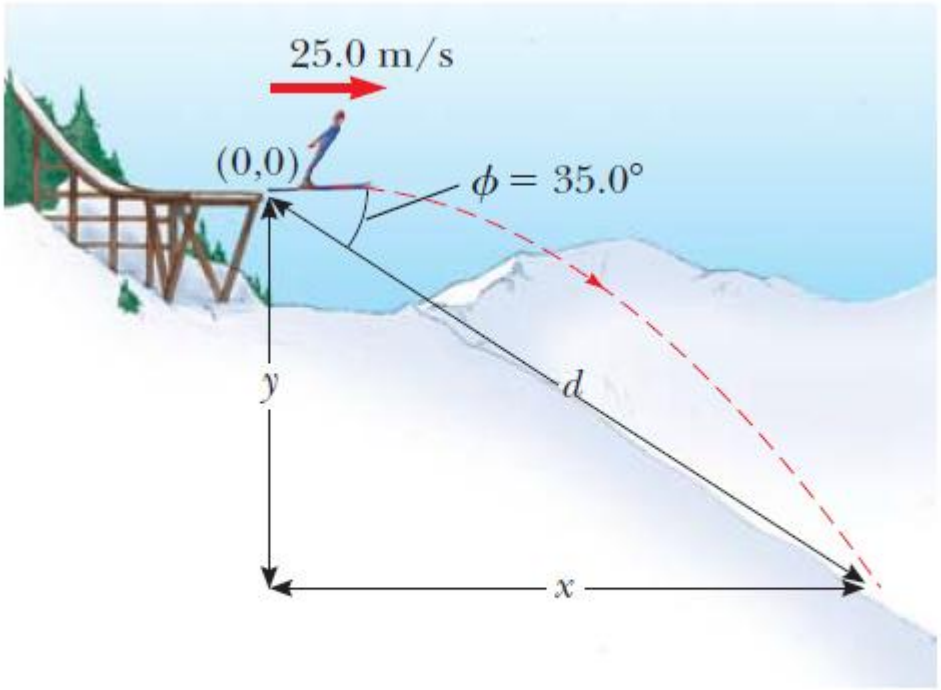


Figura 4.14 (Ejemplo 4.5) Una saltadora deja la rampa con movimiento en dirección horizontal.

SOLUCIÓN

Analizar Es conveniente seleccionar el comienzo del salto como el origen. Las componentes de velocidad inicial son $v_{xi} = 25.0$ m/s y $v_{yi} = 0$. Del triángulo rectángulo de la figura 4.14, se ve que las coordenadas x y y de la esquiadora en el punto de aterrizaje se conocen mediante $x_f = d\cos 35.0°$ y $y_f = -d\,\text{sen}\,35.0°$.

Exprese las coordenadas de la saltadora como función del tiempo:

$$1)\quad x_f = v_{xi}t = (25.0\ \text{m/s})t$$

$$2)\quad y_f = v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = -\tfrac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)t^2$$

Sustituya los valores x_f y y_f en el punto de aterrizaje:

$$3)\quad d\cos 35.0° = (25.0\ \text{m/s})t$$

$$4)\quad -d\,\text{sen}\,35.0° = -\tfrac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)t^2$$

Resuelva la ecuación 3) para t y sustituya el resultado en la ecuación 4):

$$-d\,\text{sen}\,35.0° = -\tfrac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)\left(\frac{d\cos 35.0°}{25.0\ \text{m/s}}\right)^2$$

Resuelva para d:

$$d = 109\ \text{m}$$

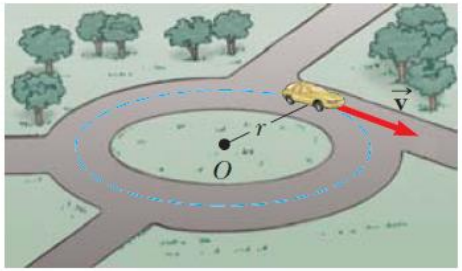
Evalúe las coordenadas x y y del punto en el que aterriza la esquiadora:

$$x_f = d\cos 35.0° = (109\ \text{m})\cos 35.0° = 89.3\ \text{m}$$

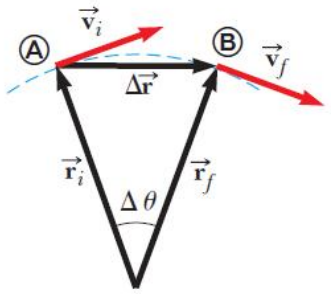
$$y_f = -d\,\text{sen}\,35.0° = -(109\ \text{m})\,\text{sen}\,35.0° = -62.5\ \text{m}$$

Partícula en movimiento circular uniforme

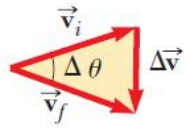
a) Un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante experimenta movimiento circular uniforme. b) Conforme una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, su vector velocidad cambia de $\vec{\mathbf{v}}_i$ a $\vec{\mathbf{v}}_f$. *c*) Construcción para determinar la dirección del cambio en velocidad $\Delta\vec{\mathbf{v}}$, que es hacia el centro del círculo para $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ pequeños.



a)



b)



c)

$$\frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{r}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} = \Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t, \qquad |\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}}| = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}\,\frac{|\Delta\vec{\mathbf{r}}|}{\Delta t}$$

donde $v = v_i = v_f$ y $r = r_i = r_f$.

Por tanto, en el límite $\Delta t \to 0$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

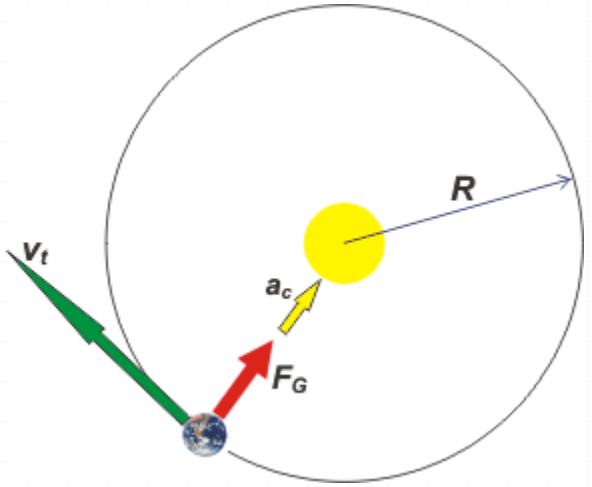
◀ Aceleración centrípeta

$$v = 2\pi r/T, \qquad T = \frac{2\pi r}{v}$$

◀ Periodo de movimiento circular

EJEMPLO 4.6 Aceleración centrípeta de la Tierra

¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol?



SOLUCIÓN

Analizar No se conoce la rapidez orbital de la Tierra para sustituirla en la ecuación 4.14. Sin embargo, con ayuda de la ecuación 4.15, se da nueva forma a la ecuación 4.14 en términos del periodo de la órbita de la Tierra, que se sabe es un año, y el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que es 1.496×10^{11} m.

Combine las ecuaciones 4.14 y 4.15:

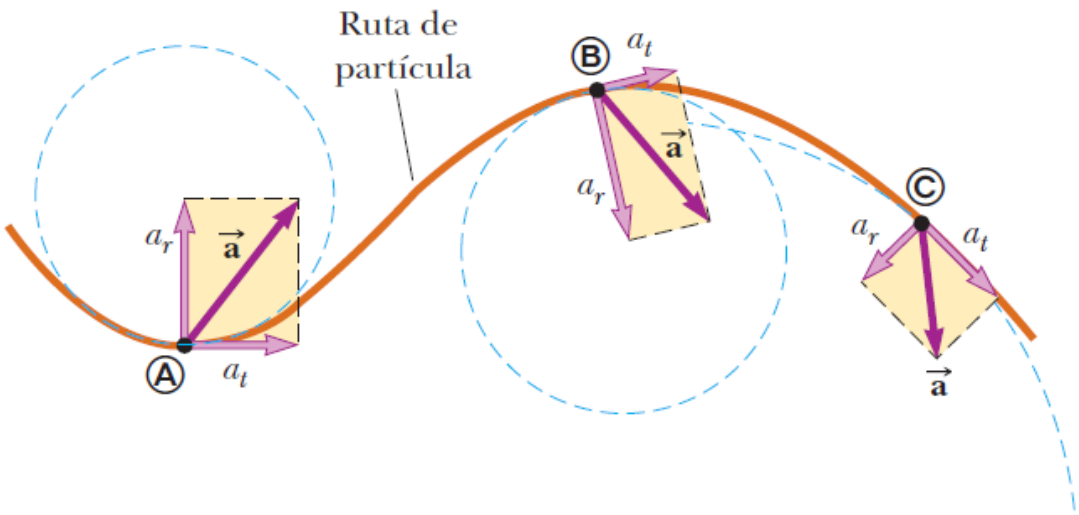
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})}{(1\ \text{año})^2}\left(\frac{1\ \text{año}}{3.156 \times 10^7\ \text{s}}\right)^2 = 5.93 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Finalizar Esta aceleración es mucho más pequeña que la aceleración en caída libre sobre la superficie de la Tierra.

Aceleraciones tangencial y radial



El movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva arbitraria que se encuentra en el plano *xy*. Si el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ (siempre tangente a la trayectoria) cambia en dirección y magnitud, las componentes de la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ son una componente tangencial a_t y otra componente radial a_r.

Aceleración total ▶ $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_t$

La componente de aceleración tangencial causa un cambio en la rapidez v de la partícula. Esta componente es paralela a la velocidad instantánea y su magnitud se conoce por

Aceleración tangencial ▶ $$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right|$$

La componente de aceleración radial surge de un cambio en dirección del vector velocidad y se proporciona por

Aceleración radial ▶ $$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$

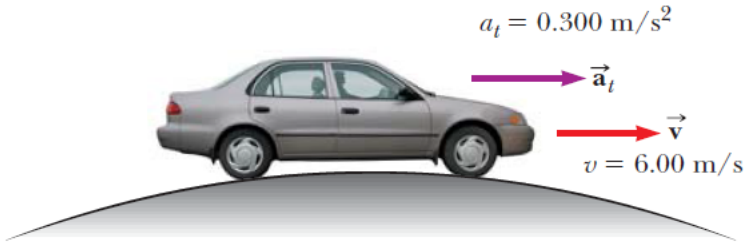
donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. La componente radial de la aceleración se reconoce como la aceleración centrípeta

El signo negativo en la ecuación indica que la dirección de la aceleración centrípeta es hacia el centro del círculo que representa el radio de curvatura. La dirección es opuesta a la del vector unitario radial $\hat{\mathbf{r}}$, que siempre apunta alejándose del origen en el centro del círculo.

Puesto que $\vec{\mathbf{a}}_r$ y $\vec{\mathbf{a}}_t$ son vectores componentes perpendiculares de $\vec{\mathbf{a}}$, se sigue que la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ es $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$.

EJEMPLO **En la cumbre**

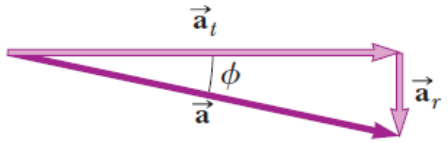
Un automóvil muestra una aceleración constante de 0.300 m/s^2 paralela a la autopista. El automóvil pasa sobre una elevación en el camino tal que lo alto de la elevación tiene forma de círculo con 500 m de radio. En el momento en que el automóvil está en lo alto de la elevación, su vector velocidad es horizontal y tiene un magnitud de 6.00 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración total para el automóvil en este instante?



a)

Evalúe la aceleración radial:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00\ \text{m/s})^2}{500\ \text{m}} = -0.072\ 0\ \text{m/s}^2$$



b)

a) Un automóvil pasa sobre una elevación que tiene forma de círculo. b) El vector aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ es la suma de los vectores aceleración tangencial y radial $\vec{\mathbf{a}}_t$ y $\vec{\mathbf{a}}_r$.

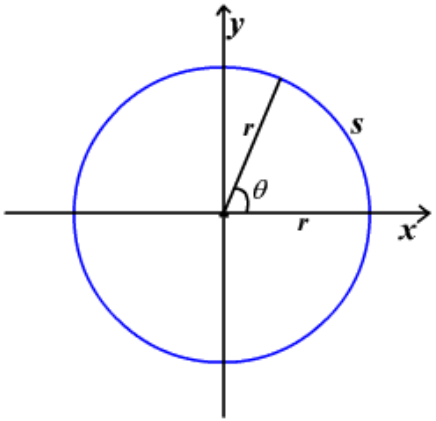
Encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$:

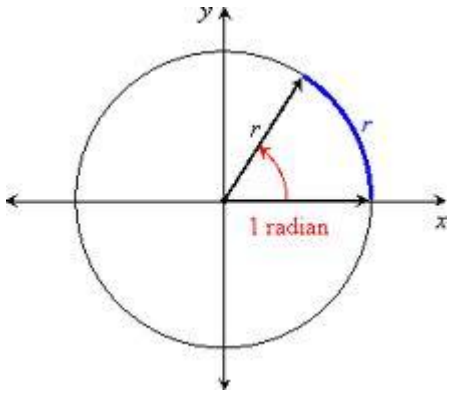
$$\sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072\ 0\ \text{m/s}^2)^2 + (0.300\ \text{m/s}^2)^2}$$
$$= 0.309\ \text{m/s}^2$$

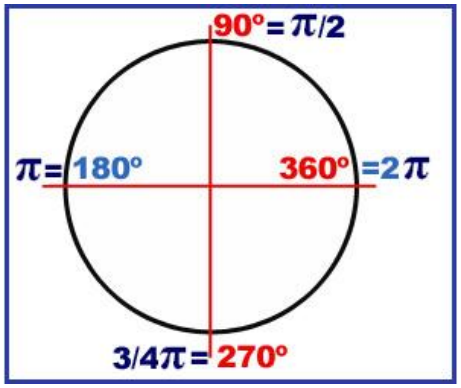
Encuentre el ángulo ϕ entre $\vec{\mathbf{a}}$ y la horizontal:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072\ 0\ \text{m/s}^2}{0.300\ \text{m/s}^2}\right) = -13.5°$$

MEDIDA DE ÁNGULOS EN RADIANES

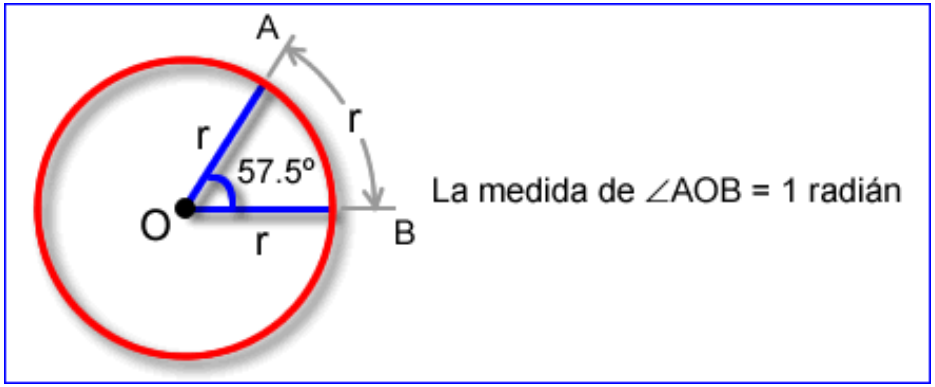






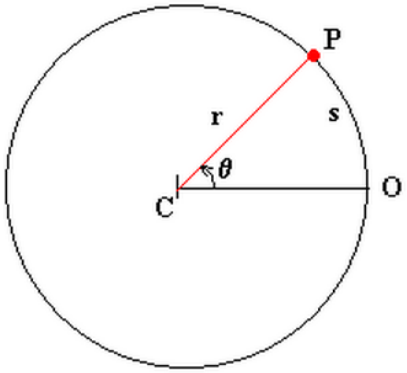
$$1\ \text{rad} = \frac{180°}{\pi} = 57.2957°$$

$$1\ \pi\ \text{rad} = 180°$$



Los radianes son una medida angular adimensional: θ[Rad]= s/r [m/m]

MOVIMIENTO CIRCULAR



Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

En el instante t el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.

Posición angular	$\theta(t)$
Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Dada la velocidad $v(t)$ calcular el desplazamiento del móvil θ-θ_0 del móvil entre los instantes t_0 y t.

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$$

Dada la aceleración $\alpha(t)$ calcular el cambio de velocidad ω-ω_0 que experimenta el móvil entre los instantes t_0 y t

$$\omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$$

Movimiento circular uniforme

Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad es constante, por tanto, la aceleración es cero.

$$\alpha = 0 \qquad \omega = \text{cte} \qquad \theta = \theta_0 + \omega t$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración es constante.

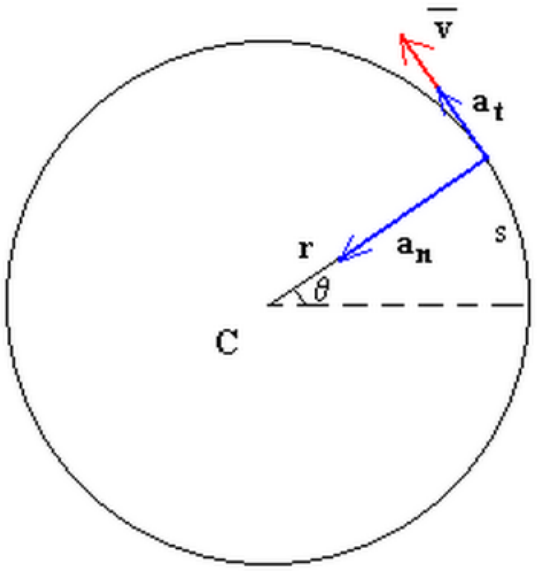
$$\alpha = \text{cte} \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

Relación entre las magnitudes lineales y angulares.

La relación entre las magnitudes angulares y lineales es la siguiente:

Longitud del arco $s=r\cdot\theta$



Velocidad, $v=\omega\cdot r$. La dirección de la velocidad de un móvil que describe un movimiento circular es tangente a la trayectoria circular.

Un móvil tiene aceleración tangencial $a_t=\alpha\cdot r$ siempre que cambie el módulo de la velocidad con el tiempo. El sentido de la aceleración tangencial es el mismo que el de la velocidad si el móvil acelera y es de sentido contrario, si se frena. Un móvil que describe un movimiento circular uniforme no tiene aceleración tangencial.

Un móvil que describe un movimiento circular siempre tiene aceleración normal, $a_n=\omega^2 r$ ya que cambia la dirección de la velocidad con el tiempo. La aceleración normal tiene dirección radial y sentido hacia el centro de la circunferencia que describe.

La aceleración del móvil se obtiene sumando vectorialmente ambas componentes de la aceleración.

EJEMPLO

Dos ruedas, en un cierto instante, giran a razón de 120 r.p.m. y 240 r.p.m., siendo sus radios de 20 cm y 40 cm respectivamente. A cada una se le aplica un freno y se detiene la menor en 16 s y la mayor en 8 s, ambas con movimiento uniformemente acelerado.

- ¿En qué instante tienen ambas ruedas la misma velocidad angular?
- ¿En qué instante, un punto de la periferia, tiene la misma velocidad lineal?. Calcula la aceleración tangencial y la aceleración normal en dichos instantes.

Solución:

Velocidades angulares iniciales

ω_{10}=120 rpm=4π rad/s
ω_{20}=240 rpm=8π rad/s

- Se paran

$\omega_1= \omega_{10}+\alpha_1 \cdot t$
$0=4\pi+ \alpha_1 \cdot 16$, $\alpha_1=- \pi/4$ rad/s^2

$\omega_2= \omega_{20}+\alpha_2 \cdot t$
$0=8\pi+\alpha_2 \cdot 8$, $\alpha_2=- \pi$ rad/s^2

- Ecuaciones del movimiento

$\omega_1=4\pi+(- \pi/4)\, t$

$\omega_2=8\pi+(- \pi) \cdot t$

$$\theta_1 = 4\pi t + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)t^2$$

$$\theta_2 = 8\pi t + \frac{1}{2}(-\pi)t^2$$

- Para que tengan la misma velocidad angular

$\omega_1= \omega_2$
$4\pi+(- \pi/4) \cdot t=8\pi+(- \pi) \cdot t$, t=16/3 s

- Para que tengan la misma velocidad lineal

$v_1=v_2$
$r_1 \cdot \omega_1=r_2 \cdot \omega_2$

$0.2 \cdot (4\pi+(- \pi/4) \cdot t)=0.4 \cdot (8\pi+(- \pi) \cdot t)$, t=48/7 s

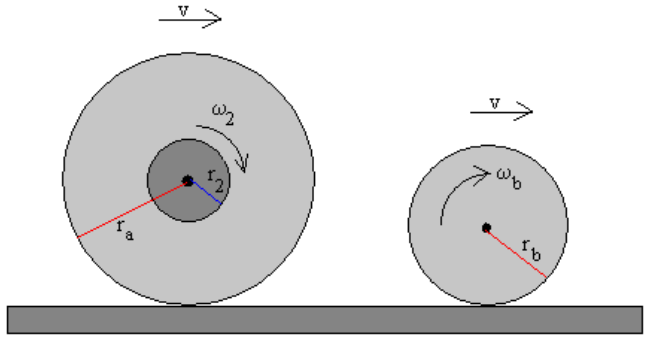
En este instante

- aceleraciones tangenciales

$a_{t1}= r_1 \cdot \alpha_1=0.2 \cdot (- \pi/4)=-0.157$ m/s^2
$a_{t2}= r_2 \cdot \alpha_2=0.4 \cdot (- \pi)=-1.257$ m/s^2

- aceleraciones normales

$a_{n1}= r_1 \cdot (\omega_1)^2=10.31$m/s^2
$a_{n2}= r_2 \cdot (\omega_2)^2=5.15$ m/s^2



MARCOS DE REFERENCIA

Un marco de referencia es un objeto material con respecto al cual se observa o mide el movimiento de un cuerpo.

Sistema de Referencia en información geoespacial

Transformación Coordenadas

Cartografía Sistemas de Información Geográfica

EPSG

GPS

Geografía

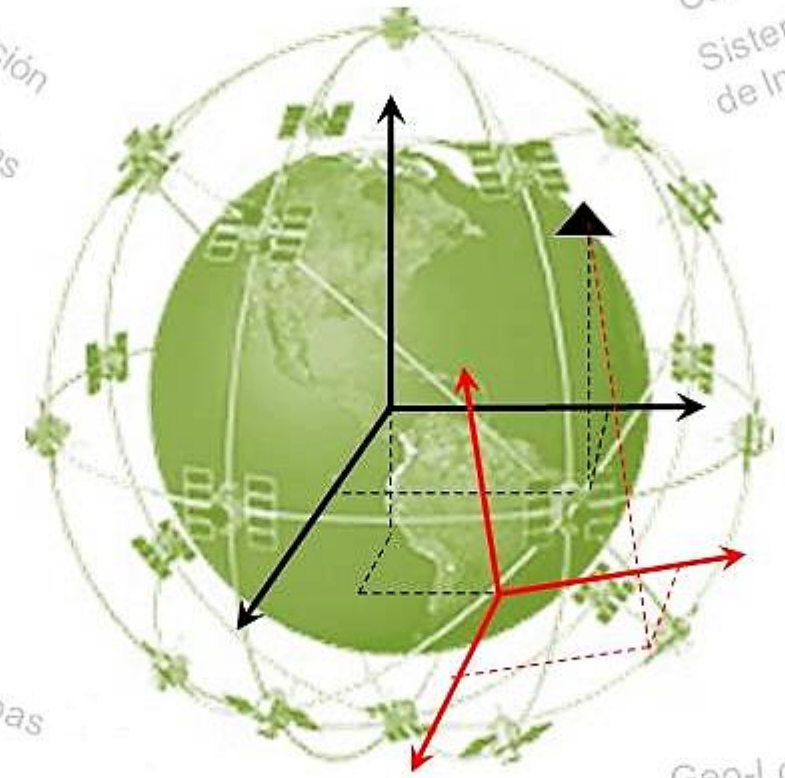
Geo-Localización

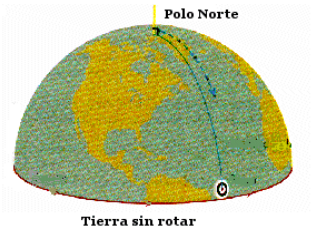
Sistemas altimétricos

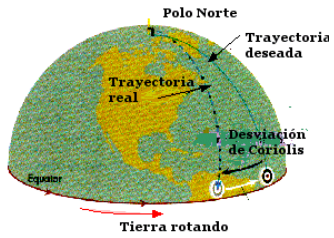
Información medioambiental

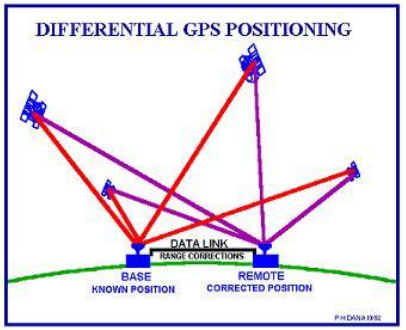
Servidores de mapas

Mapas Datos georreferenciados





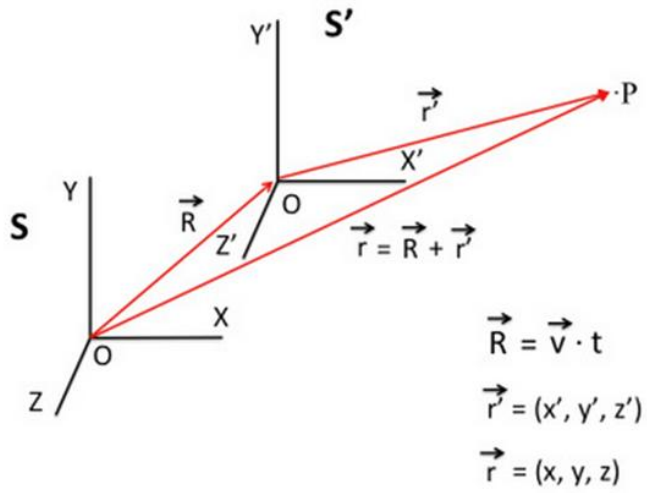




Transformaciones de Galileo

Son ecuaciones que permiten relacionar las observaciones que se realizan del movimiento de una partícula desde dos sistemas de referencia inerciales. Los sistemas inerciales son aquellos que permanecen en reposo o se mueven con movimiento rectilíneo uniforme.

Por simplicidad, al sistema de referencia en reposo lo llamaremos S y al otro sistema, el cual se mueve a velocidad constante con respecto a S, lo denominaremos con S'. Galileo estableció la relación entre ambos sistemas:



Si $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$

$(x, y, z) = (x', y', z') + v \cdot t$

$$x = x' + v \cdot t$$
$$y = y' + v \cdot t$$
$$z = z' + v \cdot t$$

Coordenadas del sistema en reposo **S** = Coordenadas del sistema en movimiento relativo **S'** + Velocidad del sistema **S'** · tiempo

Transformación directa	Transformación inversa
$x = x' + v_x \cdot t$	$x' = x - v_x \cdot t$
$y = y' + v_y \cdot t$	$y' = y - v_y \cdot t$
$z = z' + v_z \cdot t$	$z' = z - v_z \cdot t$

EJEMPLO

Un conductor que circula por una carretera a 90 km/h es adelantado por otro conductor cuyo velocímetro marca 124 km/h.

A) ¿Cuál es la velocidad del segundo conductor con respecto al primero?

B) Si ambos mantienen sus velocidades constantes, ¿qué distancia separará a ambos conductores cuando hayan pasado 20 minutos del adelantamiento?

Solución:

A) u’ = 34 km/h

B) x’ = 11.33 km

Velocidad y aceleración relativas

Ejemplo:

Si un coche se mueve a 90 km/h alejándose de un observador, y otro se mueve a 120 km/h en la misma dirección y sentido, la velocidad del segundo coche respecto al primero es de 30 km/h. Intuitivamente podemos deducir este resultado, pero también podríamos utilizar las transformaciones de Galileo.

Anteriormente hemos dicho que $u' = u - v$, siendo v la velocidad relativa entre los dos coches.

Luego $v = u - u' = 120$ km/h $- 90$ km/h $= 30$ km/h.

Posición	Velocidad	Aceleración
$x' = x - v \cdot t$	$u' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - v \cdot t)}{dt} = u - v$	$a' = \frac{du'}{dt} = \frac{d(u - v)}{dt} = a$

EJEMPLO

Un tren lleva una velocidad constante de 90 km/h. Un viajero camina por el vagón, en el mismo sentido del movimiento del tren, a una velocidad de 0,5 m/s. En el otro extremo otro pasajero camina en sentido contrario a una velocidad de 0,68 m/s. Calcula:

A) La velocidad del primer viajero respecto de un observador situado fuera del tren.

B) La velocidad del segundo viajero respecto del mismo observador.

C) La velocidad del primer viajero con respecto al segundo.

Solución:

A) $u_1 = 25.5$ m/s

B) $u_2 = 24.32$ m/s

C) $u_{1\text{-}2} = 1.18$ m/s

EJEMPLO — Un bote que cruza un río

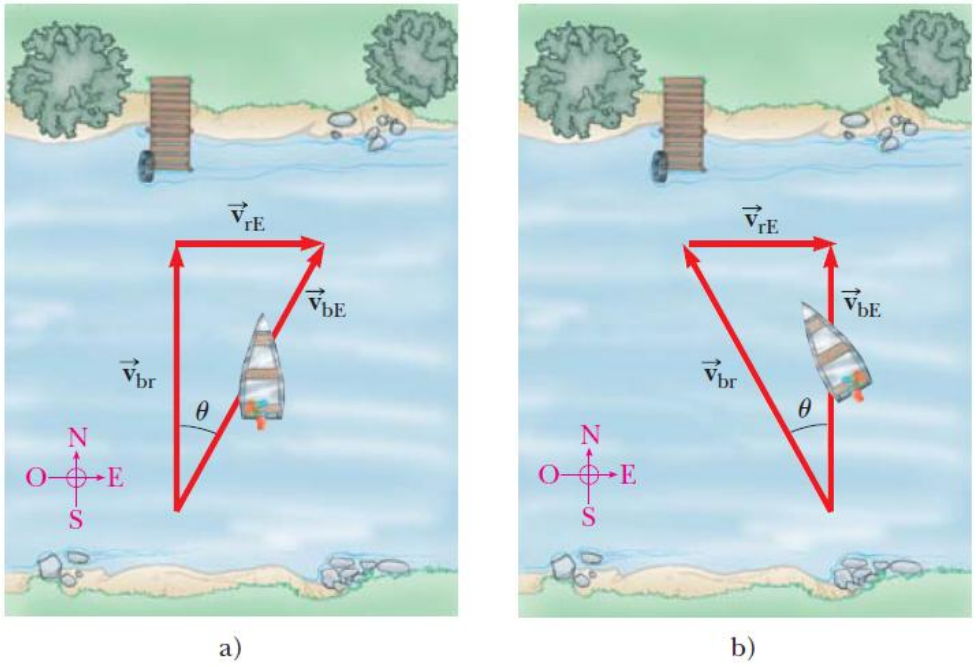
Un bote que cruza un río ancho se mueve con una rapidez de 10.0 km/h en relación con el agua. El agua en el río tiene una rapidez uniforme de 5.00 km/h hacia el este en relación con la Tierra.

A) Si el bote se dirige hacia el norte, determine la velocidad del bote en relación con un observador que está de pie en cualquier orilla.

B) Si el bote viaja con la misma rapidez de 10.0 km/h en relación con el río y debe viajar al norte, como en la figura b, ¿hacia dónde se debe dirigir?

Se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{br}$, la velocidad del *bote* en relación con el *río*, y $\vec{\mathbf{v}}_{rE}$ la velocidad del *río* en relación con la *Tierra*.

$\vec{\mathbf{v}}_{bE}$, la velocidad del *bote* respecto de la *Tierra*.



a) Un bote se dirige directamente a través de un río y termina corriente abajo. b) Para moverse directamente a través del río, el bote debe dirigirse corriente arriba.

SOLUCIÓN

A) Encuentre la rapidez v_{bE} del bote en relación con la Tierra mediante el teorema de Pitágoras:

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\ \text{km/h})^2 + (5.00\ \text{km/h})^2}$$
$$= 11.2\ \text{km/h}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = 26.6°$$

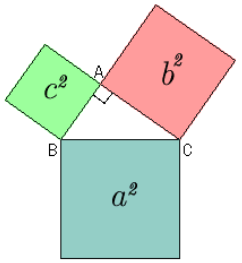
B) Aplique el teorema de Pitágoras para hallar $\vec{\mathbf{v}}_{bE}$:

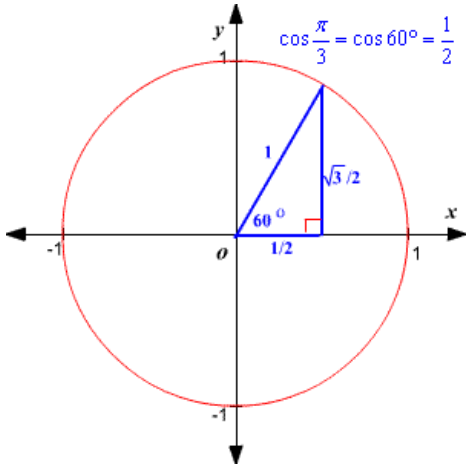
$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\ \text{km/h})^2 - (5.00\ \text{km/h})^2} = 8.66\ \text{km/h}$$

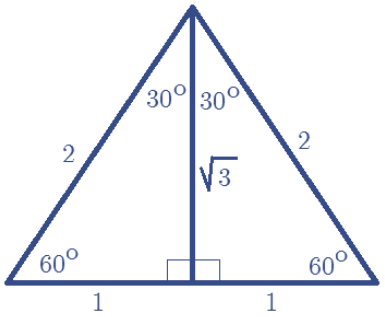
Encuentre la dirección en la que se dirige el bote:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = 30.0°$$

MEDIDAS TRIGONOMÉTRICAS



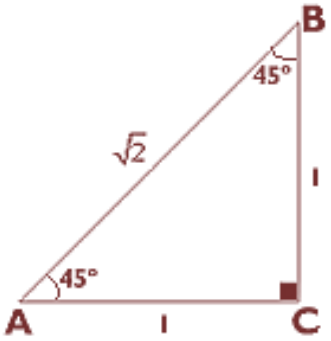




$$\sin 30^o = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30^o = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad \tan 60^o = \sqrt{3}$$



$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

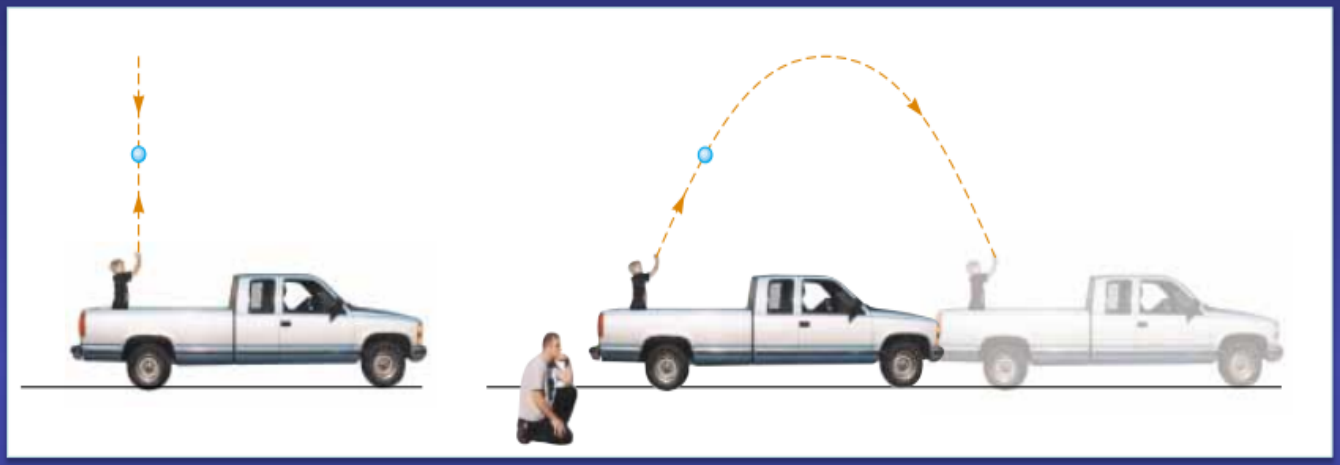
$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = 1$$

FUNCIÓN		Sen θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Csc θ
Radianes	Grados						
0	0	0	1	0	N.D.	1	N.D.
$\pi/6$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\pi/4$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\pi/2$	90°	1	0	N.D.	0	N.D.	1

Velocidad y aceleración relativas

Un camión se mueve con velocidad constante con respecto al suelo



Un pasajero en el camión lanza una pelota hacia arriba

El pasajero observará que la pelota se desplaza en una trayectoria vertical

La trayectoria de la pelota: exactamente la misma que si hubiera sido lanzada por un observador en reposo en el suelo

El observador en el suelo verá que la pelota se desplaza en una trayectoria parabólica

Para el observador en el suelo, la pelota tiene una componente horizontal de la velocidad, igual a la velocidad del camión

EJEMPLO

Durante la construcción de un edificio una persona se encuentra 15 m por encima de otra cuando lanza hacia arriba un gancho con velocidad inicial v_0.

¿Cuál es la ecuación de transformación que permite conocer la posición del objeto en cualquier instante para cualquiera de los dos observadores?

Solución:

$$y = v_0 - \frac{1}{2}gt^2 \; ; \; y' = y + 15$$

Resumen

DEFINICIONES

El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula es la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la velocidad promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

La **aceleración promedio** de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

La **aceleración instantánea** de una partícula se define como el valor límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

El **movimiento de proyectil** es una clase de movimiento en dos dimensiones bajo aceleración constante, donde $a_x = 0$ y $a_y = -g$.

Una partícula que se mueve en un círculo de radio r con rapidez constante v es un **movimiento circular uniforme**. Para tal partícula, el **periodo** de su movimiento es

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Contenido

DECLARATIVO

I. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.

1. Conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
2. Movimiento rectilíneo uniforme: aceleración en función del tiempo, la posición y la velocidad.
3. Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares; componentes tangencial y normal.
4. Movimiento relativo a un sistema de referencia de traslación.

Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

Movimiento en una dimensión

Posición, velocidad y rapidez
Velocidad y rapidez instantánea
Modelos de análisis: La partícula bajo velocidad constante
Aceleración
Diagramas de movimiento
La partícula bajo aceleración constante
Objetos en caída libre
Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo
Estrategia General para Resolver Problemas

Contenido

DECLARATIVO

I. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.

1. Conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
2. Movimiento rectilíneo uniforme: aceleración en función del tiempo, la posición y la velocidad.
3. Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares; componentes tangencial y normal.
4. Movimiento relativo a un sistema de referencia de traslación.

Curso de Dinámica

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

Movimiento en dos dimensiones

- Vectores de posición, velocidad y aceleración
- Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante
- Movimiento de proyectil
- Partícula en movimiento circular uniforme
- Aceleraciones tangencial y radial
- Velocidad y aceleración relativas

Conocer lo básico del movimiento bidimensional permitirá examinar una diversidad de movimientos que van desde el movimiento de satélites en órbita al movimiento de electrones en un campo eléctrico uniforme.

FIN

Periodo 2

MECÁNICA VECTORIAL

CINÉTICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

Contenido

DECLARATIVO

II. CINÉTICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS. MÉTODO DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON.

1. Primera ley de *Newton*.
2. Cantidad de movimiento lineal y segunda ley de *Newton*: la ecuación de movimiento.
3. Tercera ley de *Newton*.
4. Fricción cinética.
5. Aplicaciones de las leyes de *Newton* a movimientos rectilíneos.
6. Aplicaciones de las leyes de *Newton* a movimientos curvilíneos: ecuación de movimiento en componentes rectangulares, componentes tangencial y normal.

La velocidad de escape desde la superficie de la Tierra es 11,2 km/s, lo que equivale a 40 320 km/h

Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

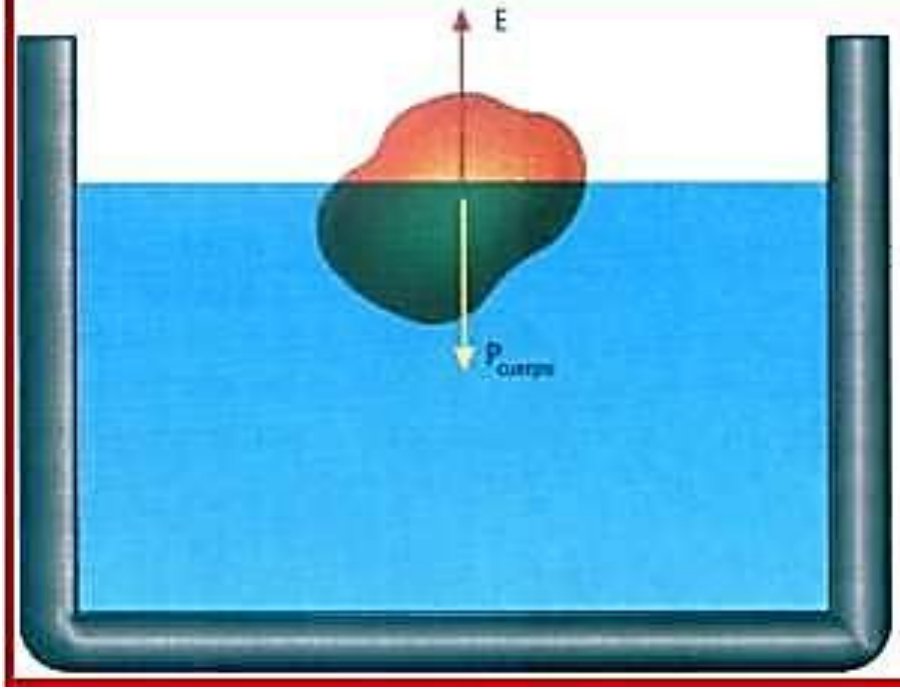
- Concepto de fuerza
- Primera ley de Newton y marcos inerciales
- Masa
- Segunda ley de Newton
- Fuerza gravitacional y peso
- Tercera ley de Newton
- Algunas aplicaciones de las leyes de Newton
- Fuerzas de fricción

Un pequeño remolcador ejerce una fuerza sobre un gran barco y hace que se mueva. ¿Cómo un bote tan pequeño puede hacer que se mueva un objeto tan grande?

Fuerzas de Flotación, Principio de Arquímedes

Los cuerpos sólidos sumergidos en un líquido experimentan un empuje hacia arriba. Este fenómeno, que es el fundamento de la flotación de los barcos, era conocido desde la más remota antigüedad, pero fue el griego Arquímedes (287-212 a.C.) quien indicó cuál es la magnitud de dicho empuje.

Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen de líquido desalojado.



Las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo sumergido son: el peso del cuerpo y el empuje del líquido. La relación entre estas dos fuerzas determina la flotabilidad. La condición de flotación para un cuerpo homogéneo es que el empuje del líquido, cuando el cuerpo está completamente sumergido, supere al peso del cuerpo:

$$E_{\text{totalmente sumergido}} > P_{\text{cuerpo}}$$

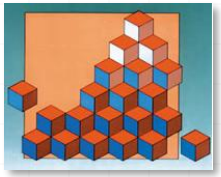
Es decir:

$$\delta_{liq} \cdot g \cdot V_{cuerpo} > \delta_{cuerpo} \cdot g \cdot V_{cuerpo}$$

Por lo tanto,

$$\delta_{liq} > \delta_{cuerpo}$$

Objetivos de la Lección



Al terminar esta lección el alumno será capaz de:

- *Enunciar las Leyes de Newton.*
- *Explicar el concepto de fuerza.*
- *Reconocer la masa gravitacional e inercial.*
- *Distinguir la fuerza gravitacional y el peso.*
- *Aplicar las layes de Newton para resolver diferentes problemas.*

Las leyes del movimiento

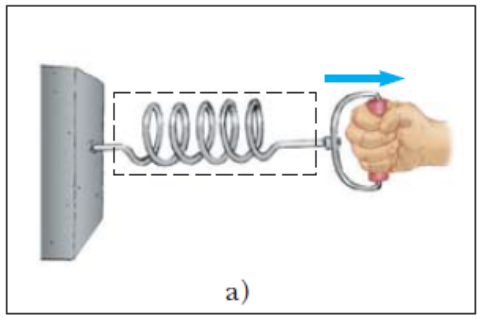
ISAAC NEWTON
Físico y matemático inglés
(1642–1727) Antes de cumplir 30 años, formuló los conceptos básicos y leyes de la mecánica, descubrió la ley de gravitación universal e inventó los métodos matemáticos del cálculo.

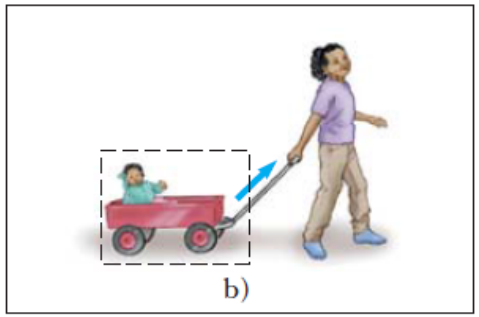
Concepto de fuerza

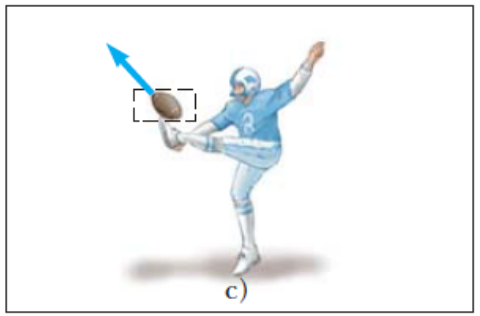
La unidad del SI de fuerza es el **newton** (N). Una fuerza de 1 N es la fuerza que, cuando actúa sobre un objeto de 1 kg de masa, produce una aceleración de 1 m/s^2.

$$1\ N \equiv 1\ kg \cdot m/s^2$$

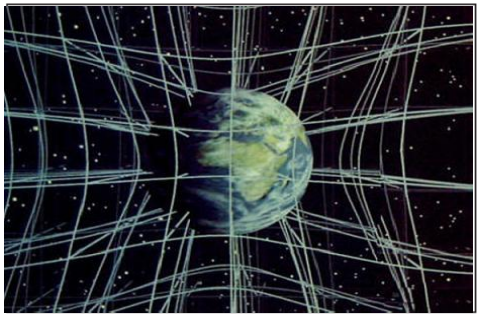
fuerzas de contacto.

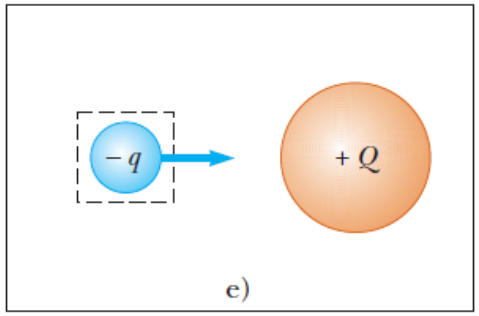


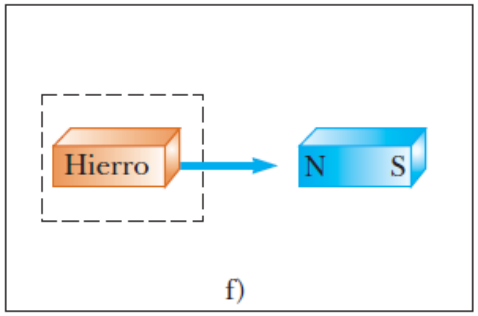




fuerzas de campo

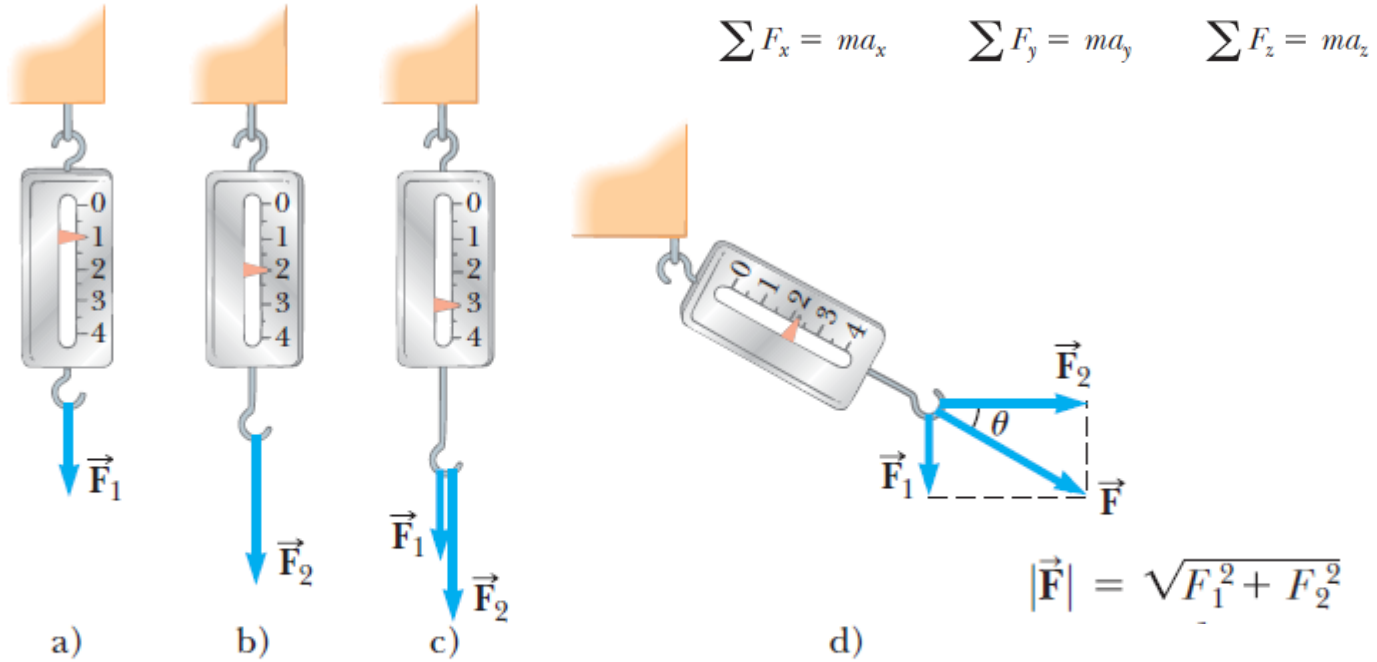






Algunos ejemplos de fuerzas aplicadas. En cada caso, sobre el objeto dentro del área limitada por líneas discontinuas se ejerce una fuerza. Algún agente en el ambiente exterior al área del recuadro ejerce una fuerza sobre el objeto.

La naturaleza vectorial de la fuerza



La naturaleza vectorial de una fuerza se prueba con una balanza de resorte. a) Una fuerza descendente $\vec{F}_1$ estira el resorte 1.00 cm. b) Una fuerza descendente $\vec{F}_2$ estira el resorte 2.00 cm. c) Cuando $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son simultáneas, el resorte se estira 3.00 cm. d) Cuando $\vec{F}_1$ es descendente y $\vec{F}_2$ es horizontal, la combinación de las dos fuerzas estira el resorte 2.24 cm.

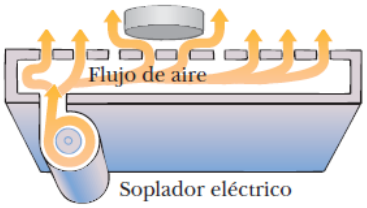
El astronauta canadiense Chris Hadfield estuvo solo 166 días viviendo en la Estación Espacial Internacional (EEI), pero se hizo rápidamente famoso por su uso de las redes sociales para mostrar la vida cotidiana en el espacio, además de espectaculares imágenes de la Tierra y divertidos videos. Entre sus múltiples demostraciones, exhibió lo difícil que es escurrir la ropa recién lavada en un lugar sin gravedad.

Primera ley de Newton y marcos inerciales

Primera ley de Newton ▶

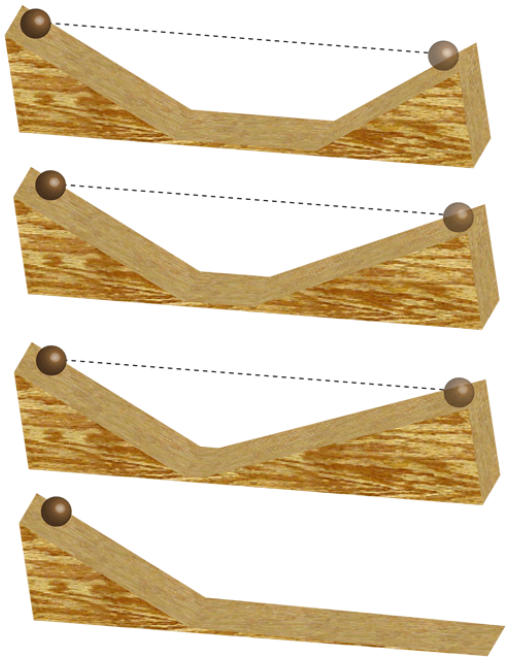
Si un objeto no interactúa con otros objetos, es posible identificar un marco de referencia en el que el objeto tiene aceleración cero.

En ausencia de fuerzas externas, y cuando se ve desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento con una velocidad constante (esto es, con una rapidez constante en una línea recta).

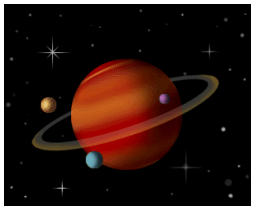


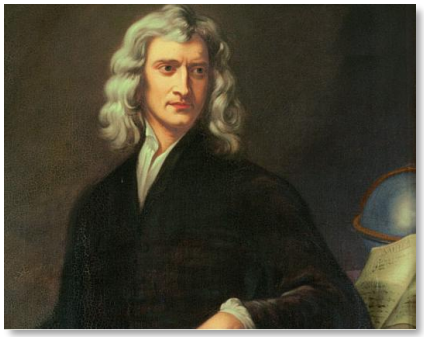
En una mesa de hockey de aire, el aire que sopla a través de los hoyos en la superficie permite que el disco se mueva casi sin fricción. Si la mesa no acelera, un disco colocado sobre la mesa permanecerá en reposo.

Figura 4 - Plano inclinado con "campanelle" (Museo Galileo, Florencia).



Segunda ley de Newton





Cuando se ve desde un marco de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa:

$$\vec{\mathbf{a}} \propto \frac{\sum \vec{\mathbf{F}}}{m}$$

Si se elige una constante de proporcionalidad 1, se relaciona masa, aceleración y fuerza a través del siguiente enunciado matemático de la segunda ley de Newton:

Segunda ley de Newton ▶

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{F} = \mathrm{d}(\mathbf{m}\,.\,\mathbf{v}) \,/\, \mathrm{dt}$$

En el caso de un cuerpo con masa constante:

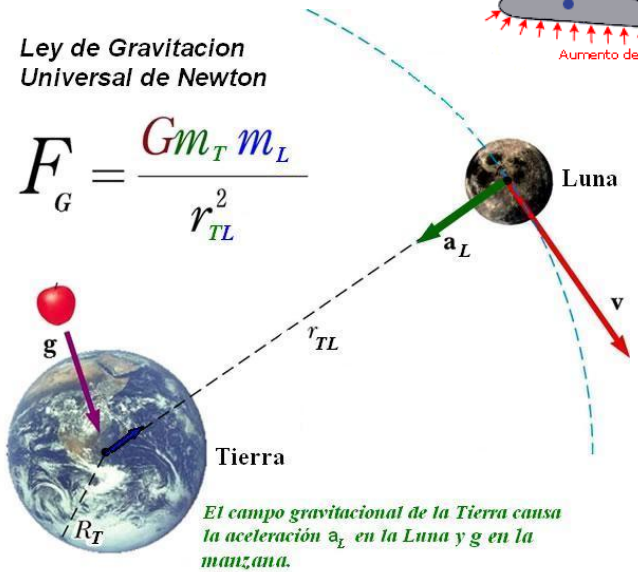
$$\mathbf{F} = \mathbf{m}\,.\,\mathrm{d}\,\mathbf{v} \,/\, \mathrm{dt}$$

Lo que es igual a:

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}\,.\,\mathbf{a}$$

Ley de Gravitacion Universal de Newton

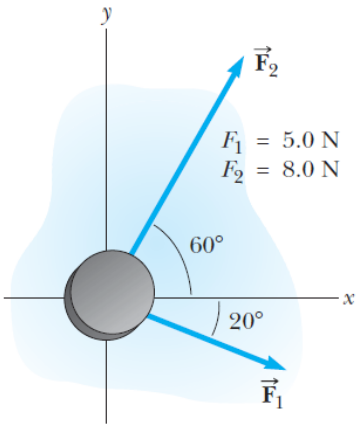
$$F_G = \frac{G m_T m_L}{r_{TL}^2}$$



El campo gravitacional de la Tierra causa la aceleración a_L en la Luna y g en la manzana.

EJEMPLO **Un disco de hockey que acelera**

Un disco de hockey que tiene una masa de 0.30 kg se desliza sobre la superficie horizontal sin fricción de una pista de patinaje. Dos bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y ejercen las fuerzas sobre el disco que se muestran en la figura. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiene una magnitud de 0.5 N y la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ tiene una magnitud de 8.0 N. Determine tanto la magnitud como la dirección de la aceleración del disco.



Un disco de hockey que se mueve sobre una superficie sin fricción está sujeto a dos fuerzas, $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$.

SOLUCIÓN

Analizar Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección *x*:

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos(-20^\circ) + F_2 \cos 60^\circ$$
$$= (5.0\text{ N})(0.940) + (8.0\text{ N})(0.500) = 8.7\text{ N}$$

Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección *y*:

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \operatorname{sen}(-20^\circ) + F_2 \operatorname{sen} 60^\circ$$
$$= (5.0\text{ N})(-0.342) + (8.0\text{ N})(0.866) = 5.2\text{ N}$$

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes (ecuación 5.3) para encontrar las componentes *x* y *y* de la aceleración del disco:

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{8.7\text{ N}}{0.30\text{ kg}} = 29\text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{5.2\text{ N}}{0.30\text{ kg}} = 17\text{ m/s}^2$$

Encuentre la magnitud de la aceleración:

$$a = \sqrt{(29\text{ m/s}^2)^2 + (17\text{ m/s}^2)^2} = 34\text{ m/s}^2$$

Localice la dirección de la aceleración en relación con el eje positivo *x*:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 30^\circ$$

Fuerza gravitacional y peso

Todos los objetos son atraídos hacia la Tierra. La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto se llama **fuerza gravitacional** $\vec{\mathbf{F}}_g$. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra y su magnitud se llama **peso** del objeto.

un objeto en caída libre experimenta una aceleración $\vec{\mathbf{g}}$ que actúa hacia el centro de la Tierra. Al aplicar la segunda ley de Newton $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ a un objeto en caída libre de masa m, con $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ y $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_g$ se obtiene

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$$

Por lo tanto, el peso de un objeto, al definirse como la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_g$ es igual a mg:

$$F_g = mg$$

la masa gravitacional y la masa inercial tienen el mismo valor.

París,1875

Patrón de un kilogramo

Sistema Internacional de Unidades

Oficina Internacional de Pesos y Medidas

EJEMPLO CONCEPTUAL ¿Cuánto pesa en un elevador?

Es muy que probable que usted haya estado en un elevador que acelera hacia arriba mientras se mueve a pisos superiores. En este caso, se siente más pesado. De hecho, si se para en una báscula en ese momento, la báscula mide una fuerza que tiene una magnitud mayor que su peso. Por lo tanto, tiene evidencia sensorial y medida que lo lleva a creer que es más pesado en esta situación. *¿Es usted* más pesado?

SOLUCIÓN

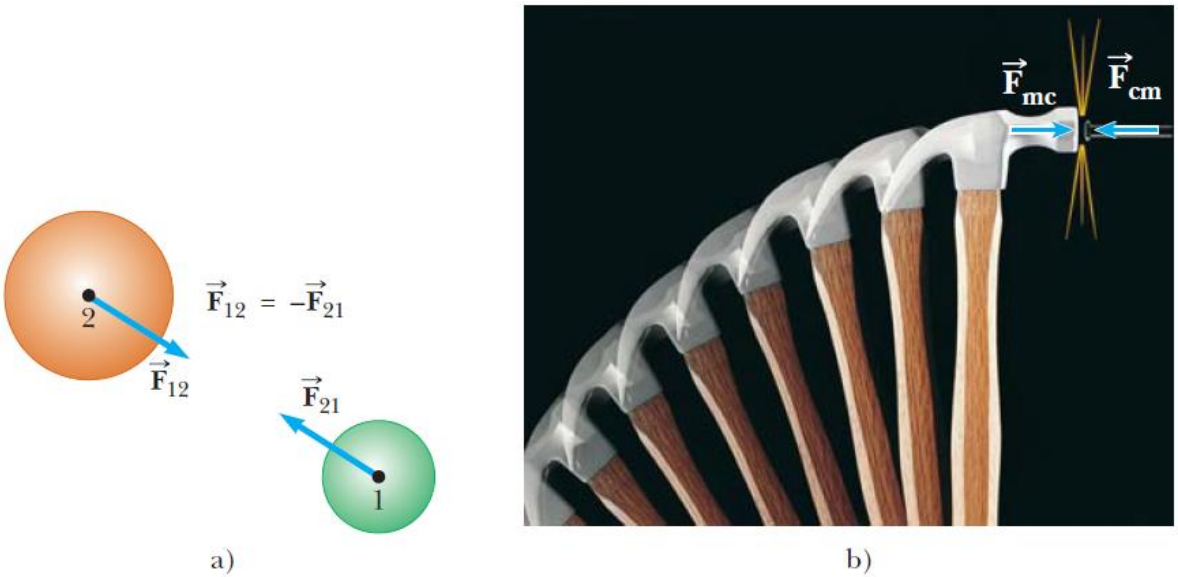
No; su peso no cambia. Sus experiencias se deben al hecho de que está en un marco de referencia no inercial. Para proporcionar la aceleración ascendente, el suelo o la báscula deben ejercer sobre sus pies una fuerza hacia arriba que sea mayor en magnitud que su peso. Esta fuerza más grande que siente es la que interpreta como sentirse más pesado. La báscula lee esta fuerza ascendente, no su peso, y por eso su lectura aumenta.

Tercera ley de Newton

Si dos objetos interactúan, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$$

◀ Tercera ley de Newton



a) b)

Tercera ley de Newton. a) La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1. b) La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{mc}$ que ejerce el martillo sobre el clavo es igual en magnitud y opuesta a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{cm}$ que ejerce el clavo sobre el martillo.

En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos *diferentes* y deben ser del mismo tipo (gravitacional, eléctrica, etcétera).

EJEMPLO CONCEPTUAL — Tú me empujas y yo te empujo

Un hombre grande y un niño pequeño están de pie, uno frente al otro sobre hielo sin fricción. Juntan sus manos y se empujan mutuamente de modo que se separan.

A) ¿Quién se aleja con mayor rapidez?

B) ¿Quién se aleja más mientras sus manos están en contacto?

SOLUCIÓN

A)

Esta situación es similar a la que se vio en la pregunta rápida 5.5. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce el hombre sobre el niño y la fuerza que ejerce el niño sobre el hombre son un par de fuerzas de la tercera ley, de modo que deben ser iguales en magnitud. (Una báscula colocada entre sus manos leería lo mismo, sin importar de cuál lado esté.) En consecuencia, el niño, que tiene la masa más pequeña, experimenta mayor aceleración. Ambos individuos aceleran durante la misma cantidad de tiempo, pero la mayor aceleración del niño en este intervalo de tiempo resulta en que su movimiento de alejamiento de la interacción es con mayor rapidez.

B)

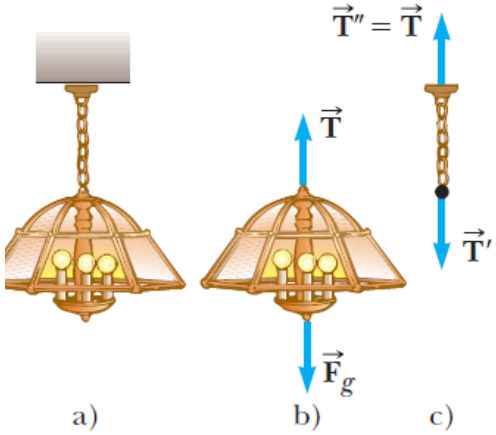
Puesto que el niño tiene la mayor aceleración y en consecuencia la mayor velocidad promedio, se aleja más que el hombre durante el intervalo de tiempo mientras que sus manos están en contacto.

Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

Partícula en equilibrio

Si la aceleración de un objeto representado como partícula es cero, el objeto se considera con el modelo de **partícula en equilibrio**. En este modelo, la fuerza neta sobre el objeto es cero:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0$$



a) Una lámpara suspendida del techo mediante una cadena de masa despreciable. b) Las fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cadena. c) Las fuerzas que actúan sobre la cadena son la fuerza $\vec{\mathbf{T}}'$ que ejerce la lámpara y la fuerza $\vec{\mathbf{T}}''$ que ejerce el techo.

El diagrama de cuerpo libre para la lámpara muestra que las fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cadena. Puesto que no hay fuerzas en la dirección x, $\Sigma F_x = 0$ no proporciona información útil. La condición $\Sigma F_y = 0$ produce

$$\sum F_y = T - F_g = 0 \quad \text{o} \quad T = F_g$$

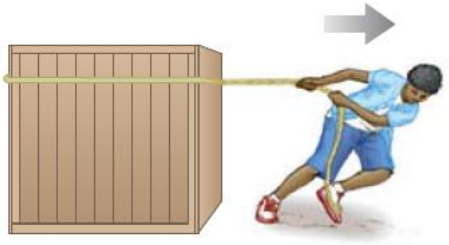
De nuevo, advierta que $\vec{\mathbf{T}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_g$ *no* son un par acción–reacción porque actúan sobre el mismo objeto, la lámpara. La fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{T}}$ es $\vec{\mathbf{T}}'$, la fuerza hacia abajo que ejerce la lámpara sobre la cadena.

Dado que la cadena es una partícula en equilibrio, el techo debe ejercer sobre la cadena una fuerza $\vec{\mathbf{T}}''$ que es igual en magnitud a la magnitud de $\vec{\mathbf{T}}'$ y apunta en la dirección opuesta.

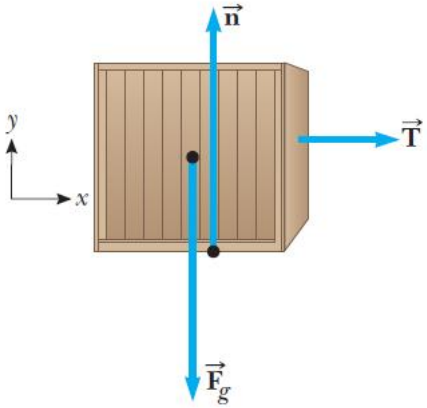
Partícula bajo una fuerza neta

Si un objeto experimenta una aceleración, su movimiento se puede analizar con el modelo de **partícula bajo una fuerza neta**. La ecuación apropiada para este modelo es la segunda ley de Newton.

Considere una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie horizontal sin fricción.



a)



b)

a) Una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre que representa las fuerzas externas que actúan sobre la caja.

Note que la fuerza horizontal $\vec{\mathbf{T}}$ que se aplica a la caja actúa a través de la soga. La magnitud de $\vec{\mathbf{T}}$ es igual a la tensión en la soga. Además de la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$, el diagrama de cuerpo libre para la caja incluye la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$ y la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que ejerce el suelo sobre la caja.

Ahora se puede aplicar la segunda ley de Newton en forma de componentes para la caja. La única fuerza que actúa en la dirección x es $\vec{\mathbf{T}}$. Al aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al movimiento horizontal se obtiene

$$\sum F_x = T = ma_x \quad \text{o} \quad a_x = \frac{T}{m}$$

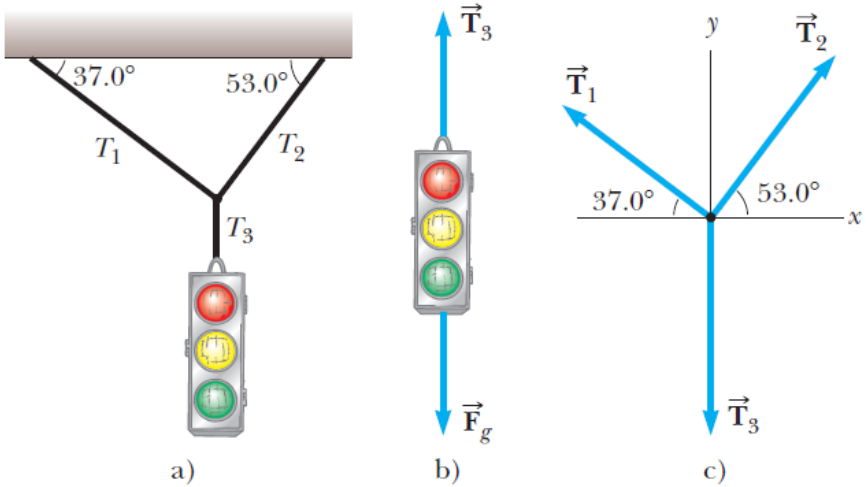
En la dirección y no se presenta aceleración porque la caja sólo se mueve horizontalmente. En consecuencia, se usa el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y.

$$\sum F_y = n + (-F_g) = 0 \quad \text{o} \quad n = F_g$$

Esto es, la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional pero actúa en la dirección opuesta.

EJEMPLO **Un semáforo en reposo**

Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos cables sostenidos a un soporte como en la figura. Los cables superiores forman ángulos de 37.0° y 53.0° con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como el cable vertical y se romperán si la tensión en ellos supera los 100 N. ¿El semáforo permanecerá colgado en esta situación, o alguno de los cables se romperá?



a) Un semáforo suspendido por cables. b) Diagrama de cuerpo libre del semáforo. c) Diagrama de cuerpo libre del nudo donde se juntan los tres cables.

SOLUCIÓN

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad T_3 - F_g = 0$$

$$T_3 = F_g = 122 \text{ N}$$

Elija los ejes coordenados como se muestra en la figura y descomponer en sus componentes las fuerzas que actúan en el nudo:

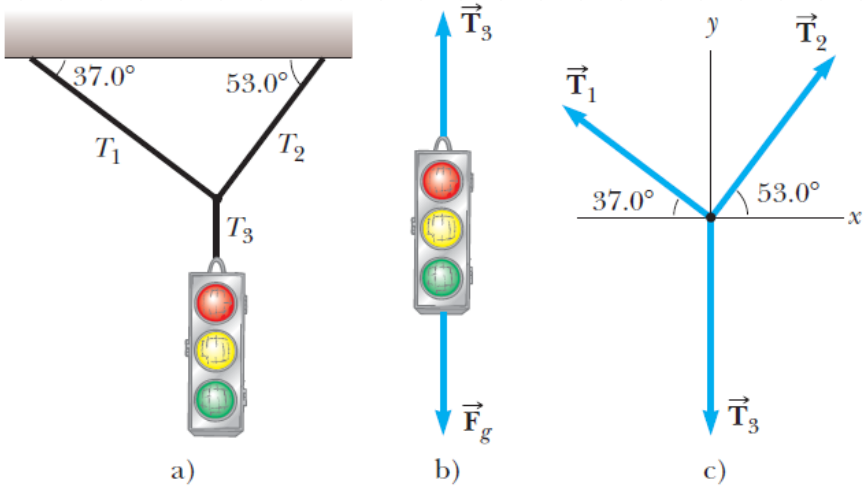
Fuerza	Componente *x*	Componente *y*
$\vec{T}_1$	$-T_1 \cos 37.0°$	$T_1 \operatorname{sen} 37.0°$
$\vec{T}_2$	$T_2 \cos 53.0°$	$T_2 \operatorname{sen} 53.0°$
$\vec{T}_3$	0	−122 N

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al nudo:

1) $\sum F_x = -T_1 \cos 37.0° + T_2 \cos 53.0° = 0$

2) $\sum F_y = T_1 \operatorname{sen} 37.0° + T_2 \operatorname{sen} 53.0° + (-122 \text{ N}) = 0$

La ecuación 1) muestra que las componentes horizontales de $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ deben ser iguales en magnitud, y la ecuación 2) indica que la suma de las componentes verticales de $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ deben equilibrar la fuerza hacia abajo $\vec{T}_3$, que es igual en magnitud al peso del semáforo.



a) Un semáforo suspendido por cables. b) Diagrama de cuerpo libre del semáforo. c) Diagrama de cuerpo libre del nudo donde se juntan los tres cables.

Resuelva la ecuación 1) para T_2 en términos de T_1:

$$3) \quad T_2 = T_1\left(\frac{\cos 37.0^\circ}{\cos 53.0^\circ}\right) = 1.33T_1$$

Sustituya este valor para T_2 en la ecuación 2):

$$T_1 \operatorname{sen} 37.0^\circ + (1.33T_1)(\operatorname{sen} 53.0^\circ) - 122\ \text{N} = 0$$

$$T_1 = 73.4\ \text{N}$$

$$T_2 = 1.33T_1 = 97.4\ \text{N}$$

Ambos valores son menores que 100 N (apenas para T_2), de modo que los cables no se romperán.

EJEMPLO CONCEPTUAL Fuerzas entre vagones en un tren

Los vagones de tren se conectan mediante *enganches*, que están bajo tensión conforme la locomotora jala el tren. Imagine que usted está en un tren que aumenta velocidad con aceleración constante. A medida que se mueve a lo largo del tren desde la locomotora hacia el último vagón, midiendo la tensión en cada conjunto de enganches, ¿la tensión aumenta, disminuye o permanece igual? Cuando el ingeniero aplica los frenos, los enganches están bajo compresión. ¿Cómo varía esta fuerza de compresión desde la locomotora hasta el último vagón? (Suponga que sólo se aplican los frenos en las ruedas de la máquina.)

SOLUCIÓN

Conforme el tren aumenta la velocidad, la tensión disminuye desde el frente del tren hasta la parte trasera. El enganche entre la locomotora y el primer vagón debe aplicar suficiente fuerza para acelerar el resto de los vagones. A medida que se mueve a lo largo del tren, cada enganche acelera menos masa detrás de él. El último enganche tiene que acelerar sólo al último vagón y por lo tanto está bajo menos tensión.

Cuando se aplican los frenos, la fuerza nuevamente disminuye desde el frente a la parte trasera. El enganche que conecta la locomotora con el primer vagón debe aplicar una gran fuerza para frenar el resto de los vagones, pero el enganche final debe aplicar una fuerza suficientemente grande para frenar sólo al último vagón.

EJEMPLO **El auto que escapa**

Un automóvil de masa m está sobre un camino cubierto con hielo inclinada en un ángulo θ, como en la figura.

A) Encuentre la aceleración del automóvil, si supone que la pista no tiene fricción.

B) Considere que el automóvil se libera desde el reposo en lo alto del plano y que la distancia desde la defensa frontal del automóvil hasta el fondo del plano inclinado es d. ¿Cuánto tarda la defensa frontal en llegar al fondo de la colina, y cuál es la rapidez del automóvil cuando llega ahí?

SOLUCIÓN

A)

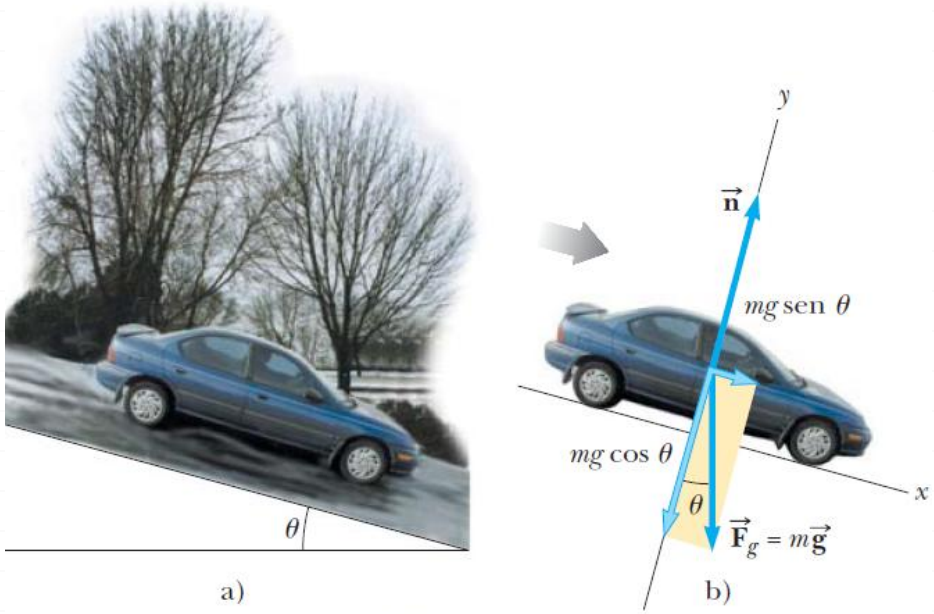
Al aplicar la segunda ley de Newton al automóvil en forma de componentes, y notar que $a_y = 0$:

$$1) \quad \sum F_x = mg \operatorname{sen} \theta = ma_x$$

$$2) \quad \sum F_y = n - mg \cos \theta = 0$$

Resuelva la ecuación 1) para a_x:

$$3) \quad a_x = g \operatorname{sen} \theta$$



a) Un automóvil de masa m sobre un plano inclinado sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil.

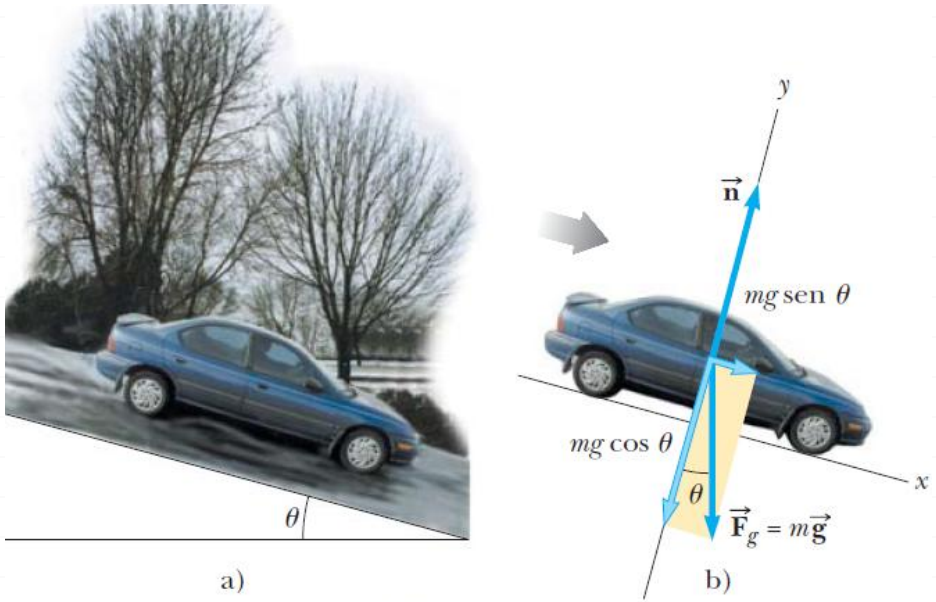
Finalizar La elección de ejes que resulta en el automóvil se representa como una partícula bajo una fuerza neta en la dirección x y una partícula en equilibrio en la dirección y. Además, ¡la componente aceleración a_x es independiente de la masa del automóvil! Sólo depende del ángulo de inclinación y de g.

De la ecuación 2) se concluye que la componente de $\vec{\mathbf{F}}_g$ perpendicular al plano se equilibra mediante la fuerza normal; esto es, $n = mg \cos \theta$. Esta situación es otro caso en el que la fuerza normal *no* es igual en magnitud al peso del objeto.

SOLUCIÓN

B)

Esta parte del problema pertenece a cinemática más que a dinámica, y la ecuación 3) muestra que la aceleración a_x es constante. Por lo tanto, debe clasificar al automóvil en este inciso del problema como una partícula bajo aceleración constante.



a) Un automóvil de masa m sobre un plano inclinado sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil.

Al definir la posición inicial de la defensa frontal como $x_i = 0$ y su posición final como $x_f = d$, y reconocer que $v_{xi} = 0$, aplique la ecuación $x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$:

$$d = \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

Resuelva para t:

$$4) \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a_x}} = \sqrt{\frac{2d}{g \operatorname{sen} \theta}}$$

Aplique la ecuación, con $v_{xi} = 0$ para encontrar la velocidad final del automóvil:

$$v_{xf}^2 = 2a_x d$$

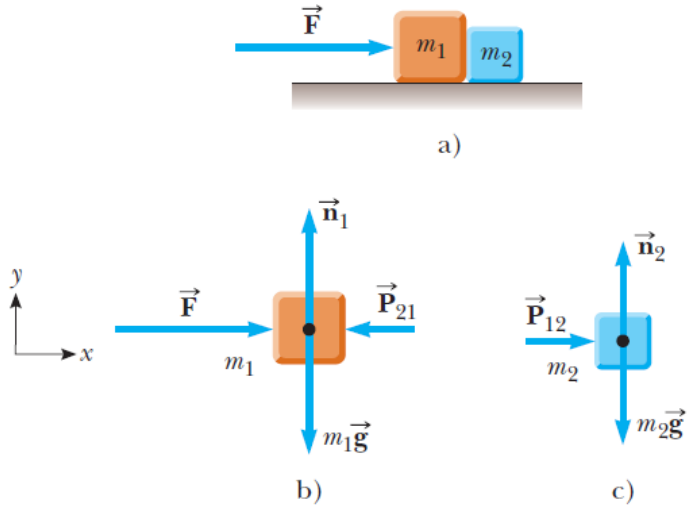
$$5) \quad v_{xf} = \sqrt{2a_x d} = \sqrt{2gd \operatorname{sen} \theta}$$

EJEMPLO Un bloque empuja a otro

Dos bloques de masas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$, se colocan en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura Una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a m_1 como se muestra.

A) Encuentre la magnitud de la aceleración del sistema.

B) Determine la magnitud de la fuerza de contacto entre los dos bloques.



a) Se aplica una fuerza se a un bloque de masa m_1, que empuja a un segundo bloque de masa m_2. b) Diagrama de cuerpo libre para m_1. c) Diagrama de cuerpo libre para m_2.

A)

Primero represente la combinación de los dos bloques como una sola partícula. Aplique la segunda ley de Newton a la combinación:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$1) \quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

La aceleración conocida por la ecuación 1) es la misma que la de un solo objeto de masa $m_1 + m_2$ y sometida a la misma fuerza.

SOLUCIÓN

B)

Construya primero un diagrama de cuerpo libre para cada bloque, como se muestra en las figuras, donde la fuerza de contacto se denota $\vec{\mathbf{P}}$. A partir de la figura se ve que la única fuerza horizontal que actúa sobre m_2 es la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ (la fuerza que ejerce m_1 sobre m_2), que se dirige hacia la derecha.

Aplique la segunda ley de Newton a m_2:

$$2) \quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

Sustituya el valor de la aceleración a_x que proporciona la ecuación 1) en la ecuación 2):

$$3) \quad P_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F$$

Este resultado muestra que la fuerza de contacto P_{12} es *menor* que la fuerza aplicada F. La fuerza que se requiere para acelerar el bloque 2 debe ser menor que la fuerza requerida para producir la misma aceleración para el sistema de dos bloques.

Para finalizar, compruebe esta expresión para P_{12} al considerar las fuerzas que actúan sobre m_1, que se muestran en la figura b. Las fuerzas que actúan horizontales sobre m_1 son la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ hacia la derecha y la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ hacia la izquierda (la fuerza que ejerce m_2 sobre m_1). A partir de la tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ es la fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{P}}_{12}$, de modo que $P_{21} = P_{12}$.

Aplique la segunda ley de Newton a m_1:

$$4) \quad \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

Resuelva para P_{12} y sustituya el valor de a_x de la ecuación 1):

$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F$$

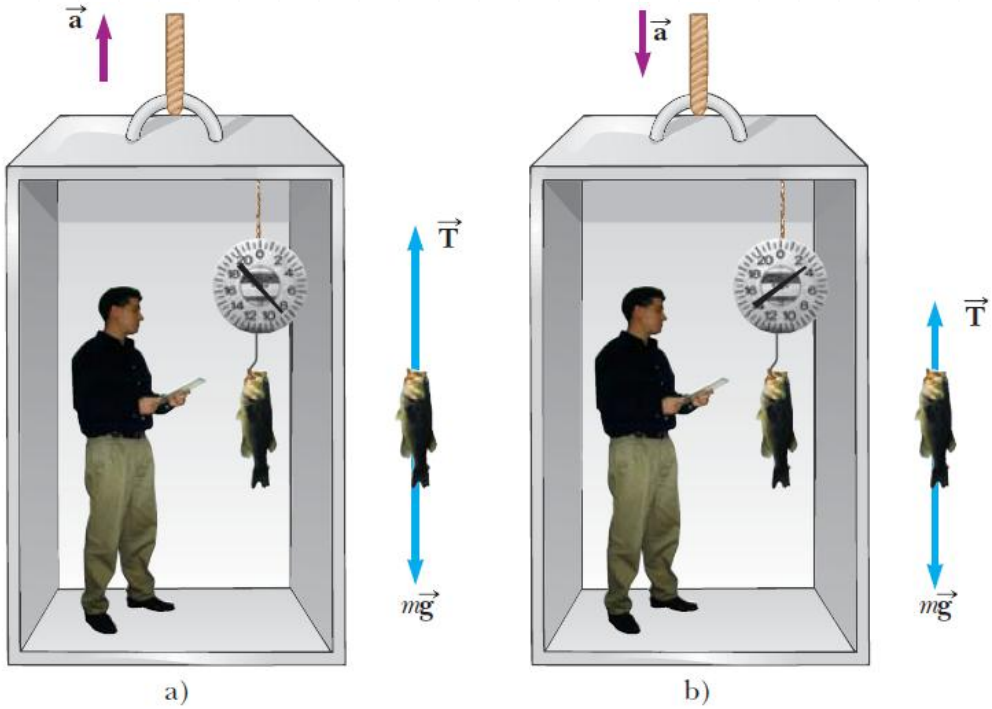
Este resultado concuerda con la ecuación 3), como debe ser.

EJEMPLO Peso de un pescado en un elevador

Una persona pesa un pescado de masa m en una balanza de resorte unida al techo de un elevador, como se ilustra en la figura.

A) Muestre que, si el elevador acelera ya sea hacia arriba o hacia abajo, la balanza de resorte da una lectura que es diferente del peso del pescado.

B) Evalúe las lecturas en la balanza para un pescado de 40.0 N si el elevador se traslada con una aceleración $a_y = \pm 2.00\ \text{m/s}^2$.



a) b)

Peso aparente contra peso real. a) Cuando el elevador acelera hacia arriba, la lectura en la balanza de resorte proporciona un valor mayor que el peso del pescado. b) Cuando el elevador acelera hacia abajo, la lectura en la balanza de resorte proporciona un valor menor que el peso del pescado.

SOLUCIÓN

A)

Aplique la segunda ley de Newton al pescado: $\sum F_y = T - mg = ma_y$

Resuelva para T: $$1) \quad T = ma_y + mg = mg\left(\frac{a_y}{g} + 1\right) = F_g\left(\frac{a_y}{g} + 1\right)$$

donde se eligió hacia arriba como la dirección y positiva. Se concluye de la ecuación 1) que la lectura en la balanza de T es mayor que el peso del pescado mg si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia arriba, de modo que a_y es positiva, y que la lectura es menor que mg si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia abajo, de modo que a_y es negativa.

B)

Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación 1) si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia arriba: $$T = (40.0\text{ N})\left(\frac{2.00\text{ m/s}^2}{9.80\text{ m/s}^2} + 1\right) = 48.2\text{ N}$$

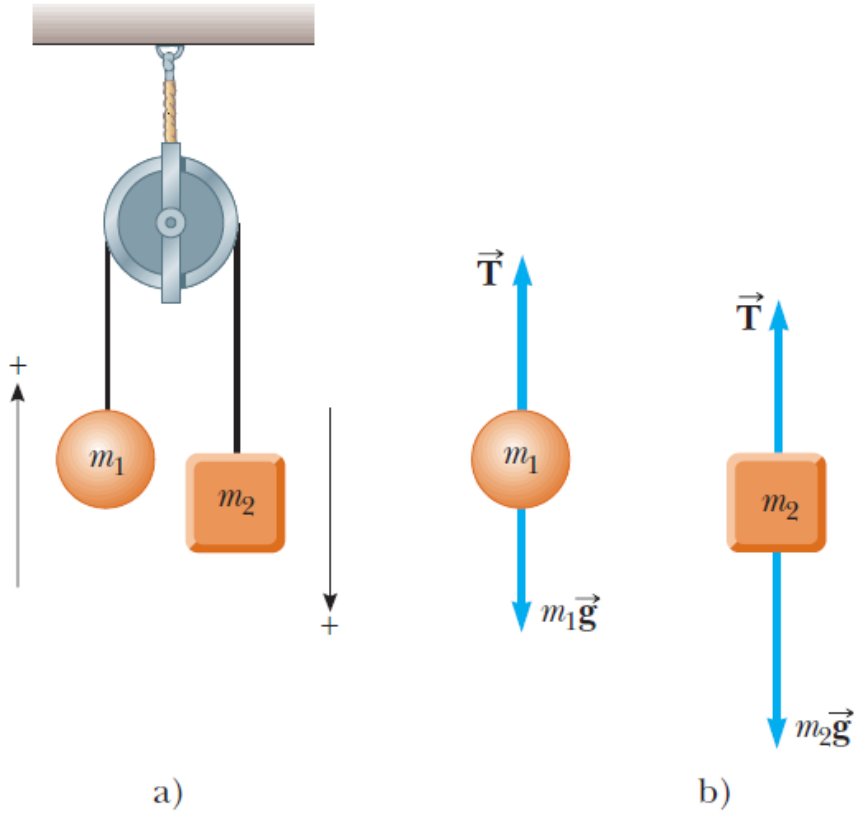
Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación 1) si $\vec{\mathbf{a}}$ es hacia abajo: $$T = (40.0\text{ N})\left(\frac{-2.00\text{ m/s}^2}{9.80\text{ m/s}^2} + 1\right) = 31.8\text{ N}$$

¿Qué pasaría si? Suponga que el cable del elevador se rompe y el elevador y su contenido están en caída libre. ¿Qué sucede con la lectura de la balanza?

Respuesta Si el elevador está en caída libre, su aceleración es $a_y = -g$. De la ecuación 1) se ve que la lectura de la balanza de T en este caso es cero; esto es; el pescado *parece* no tener peso.

EJEMPLO **La máquina de Atwood**

Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan verticalmente sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura, el dispositivo se llama *máquina de Atwood*. Se usa a veces en el laboratorio para calcular el valor de g. Determine la magnitud de la aceleración de dos objetos y la tensión en la cuerda sin peso.



La máquina de Atwood. a) Dos objetos conectados mediante una cuerda inextensible sin masa sobre una polea sin fricción. b) Diagramas de cuerpo libre para los dos objetos.

Aplique la segunda ley de Newton al objeto 1:

$$1) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y$$

Ahora al objeto 2:

$$2) \quad \sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_y$$

Sume la ecuación 2) con la ecuación 1) y advierta que T se cancela:

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a_y + m_2 a_y$$

Resuelva para la aceleración:

$$3) \quad a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

Sustituya la ecuación 3) en la ecuación 1) para encontrar T:

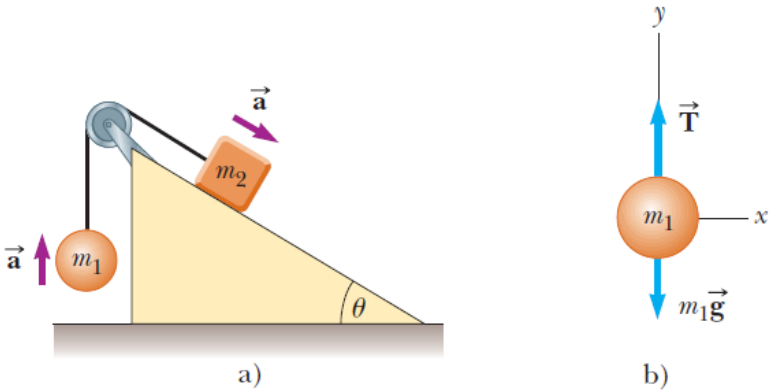
$$4) \quad T = m_1 (g + a_y) = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

¿Qué pasaría si? Describa el movimiento del sistema si los objetos tienen masas iguales, es decir, $m_1 = m_2$.

Respuesta Si se tiene la misma masa en ambos lados, el sistema está en equilibrio y no debe acelerar. Matemáticamente, se ve que, si $m_1 = m_2$, la ecuación 3) produce $a_y = 0$.

EJEMPLO Aceleración de dos objetos conectados mediante una cuerda

Una bola de masa m_1 y un bloque de masa m_2 se unen mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura. El bloque se encuentra sobre un plano inclinado sin fricción de ángulo θ. Encuentre la magnitud de la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda.



SOLUCIÓN

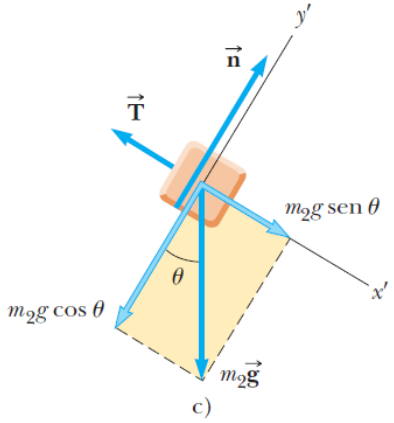
Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes a la bola, y elija la dirección hacia arriba como positiva:

$$1) \quad \sum F_x = 0$$

$$2) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Para que la bola acelere hacia arriba, es necesario que $T > m_1 g$.

En la ecuación 2), sustituya a_y con a porque la aceleración sólo tiene un componente y.



a) Dos objetos conectados mediante una cuerda ligera sobre una polea sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para la bola. c) Diagrama de cuerpo libre para el bloque. (El plano inclinado no tiene fricción.)

Para el bloque es conveniente elegir el eje x' positivo a lo largo del plano inclinado, se elige la dirección positiva hacia abajo en el plano.

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes al bloque:

$$3) \quad \sum F_{x'} = m_2 g \operatorname{sen} \theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

$$4) \quad \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos \theta = 0$$

Resuelva la ecuación 2) para T:

$$5) \quad T = m_1(g + a)$$

Sustituya esta expresión para T en la ecuación 3):

$$m_2 g \operatorname{sen} \theta - m_1(g + a) = m_2 a$$

Resuelva para a:

$$6) \quad a = \frac{m_2 g \operatorname{sen} \theta - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

Sustituya esta expresión para a en la ecuación 5) para encontrar T:

$$7) \quad T = \frac{m_1 m_2 g\,(\operatorname{sen} \theta + 1)}{m_1 + m_2}$$

Fuerzas de fricción

Cuando un objeto está en movimiento ya sea sobre una superficie o en un medio viscoso como aire o agua, existe resistencia al movimiento porque el objeto interactúa con su entorno. A tal resistencia se le llama **fuerza de fricción**. Las fuerzas de fricción son muy importantes en la vida cotidiana. Permiten que uno camine o corra y son necesarias para el movimiento de los vehículos con ruedas.

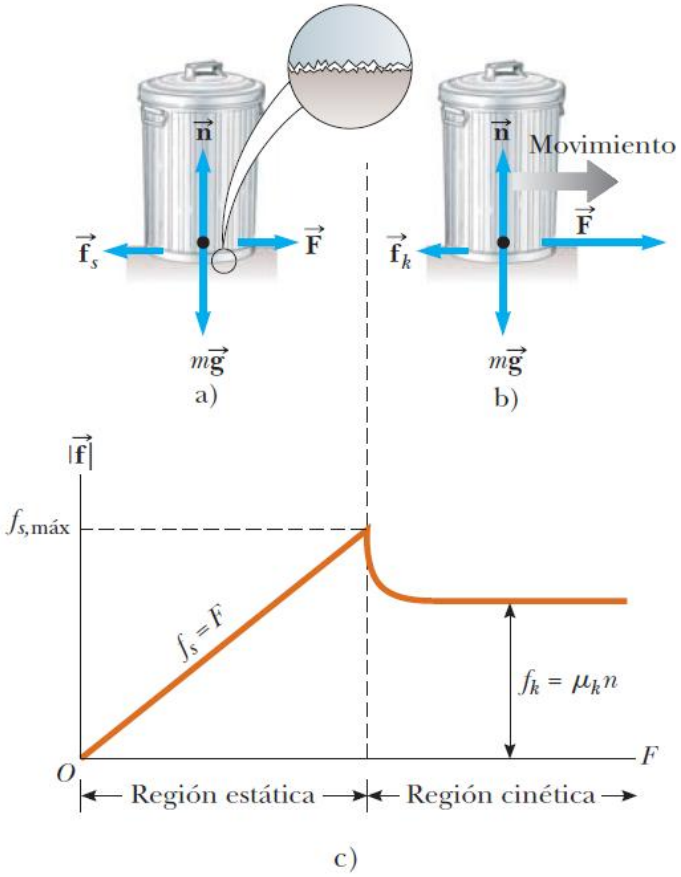


Figura 5.16 Cuando jala un bote de basura, la dirección de la fuerza de fricción $\vec{f}$ entre el bote y una superficie rugosa es opuesta a la dirección de la fuerza aplicada $\vec{F}$. Puesto que ambas superficies son rugosas, el contacto sólo se realiza en algunos puntos, como se ilustra en la vista "amplificada". a) Para pequeñas fuerzas aplicadas, la magnitud de la fuerza de fricción estática es igual a la magnitud de la fuerza aplicada. b) Cuando la magnitud de la fuerza aplicada supera la magnitud de la fuerza máxima de fricción estática, el bote de basura queda libre. La fuerza aplicada ahora es mayor que la fuerza de fricción cinética y el bote puede acelerar hacia la derecha. c) Gráfica de fuerza de fricción en función de la fuerza aplicada. Note que $f_{s,máx} > f_k$.

Fuerzas de fricción

En términos experimentales, se encuentra que, a una buena aproximación, tanto $f_{s,máx}$ como f_k son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal que se ejerce sobre un objeto por la superficie.

- La magnitud de la fuerza de fricción estática entre cualesquiera dos superficies cualesquiera en contacto tiene los valores

$$f_s \leq \mu_s n \qquad (5.9)$$

donde la constante adimensional μ_s se llama **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal que ejerce una superficie sobre la otra. La igualdad en la ecuación 5.9 se cumple cuando las superficies están a punto de deslizarse, esto es, cuando $f_s = f_{s,máx} \equiv \mu_s n$. Esta situación se llama *movimiento inminente.*

- La magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa entre dos superficies es

$$f_k = \mu_k n \qquad (5.10)$$

donde μ_k se llama **coeficiente de fricción cinética**.

Fuerzas de fricción

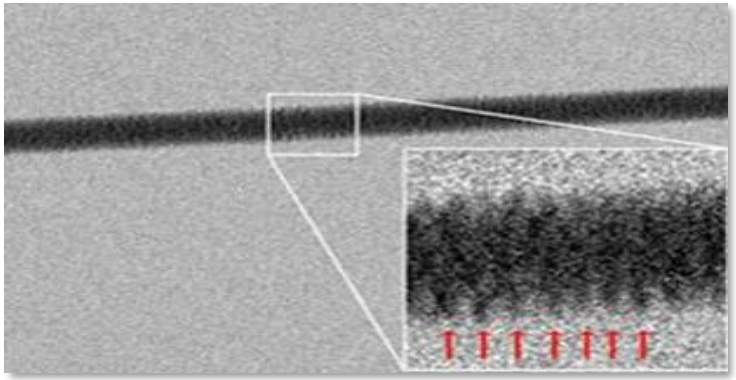
- Los valores de μ_k y μ_s dependen de la naturaleza de las superficies, pero μ_k por lo general es menor que μ_s. El intervalo de los valores típicos fluctúan de 0.03 a 1.0. La tabla 5.1 indica algunos valores reportados.

TABLA 5.1

Coeficientes de fricción

	μ_s	μ_k
Hule sobre concreto	1.0	0.8
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.4
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Madera sobre madera	0.25–0.5	0.2
Madera encerada sobre nieve húmeda	0.14	0.1
Madera encerada sobre nieve seca	—	0.04
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.06
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Articulación sinovial en humanos	0.01	0.003

Nota: Todos los valores son aproximados. En algunos casos el coeficiente de fricción puede superar 1.0.



EJEMPLO 5.12 Disco de hockey deslizante

A un disco de hockey sobre un estanque congelado se le da una rapidez inicial de 20.0 m/s. Si el disco siempre permanece sobre el hielo y se desliza 115 m antes de llegar al reposo, determine el coeficiente de fricción cinética entre el disco y el hielo.

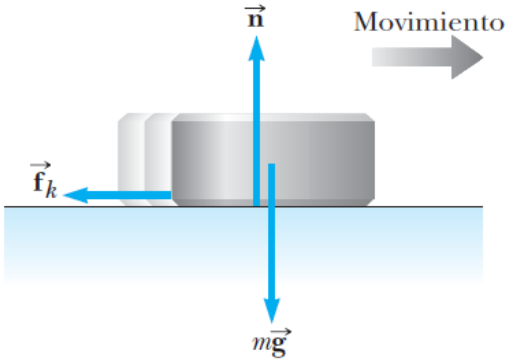


Figura 5.19 (Ejemplo 5.12) Después de que al disco se le da una velocidad inicial hacia la derecha, las únicas fuerzas externas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, la fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza de fricción cinética $\vec{f}_k$.

SOLUCIÓN

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta en la dirección x del disco:

$$1) \quad \sum F_x = -f_k = ma_x$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y del disco:

$$2) \quad \sum F_y = n - mg = 0$$

Sustituya $n = mg$ de la ecuación 2) y $f_k = \mu_k n$ en la ecuación 1):

$$-\mu_k n = -\mu_k mg = ma_x$$

$$a_x = -\mu_k g$$

Aplique el modelo de partícula bajo aceleración constante al disco, con la ecuación 2.17, $v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$, con $x_i = 0$ y $v_f = 0$:

$$0 = v_{xi}^2 + 2a_x x_f = v_{xi}^2 - 2\mu_k g x_f$$

$$\mu_k = \frac{v_{xi}^2}{2gx_f}$$

$$\mu_k = \frac{(20.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)(115 \text{ m})} = 0.117$$

Finalizar Observe que μ_k es adimensional, cual debe ser, y que tiene un valor menor, consistente con un objeto que se desliza en hielo.

EJEMPLO 5.13 Aceleración de dos objetos conectados cuando la fricción está presente

Un bloque de masa m_1 sobre una superficie horizontal rugosa se conecta a una bola de masa m_2 mediante una cuerda ligera sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura 5.20a. Al bloque se aplica una fuerza de magnitud F en un ángulo θ con la horizontal como se muestra, y el bloque se desliza hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

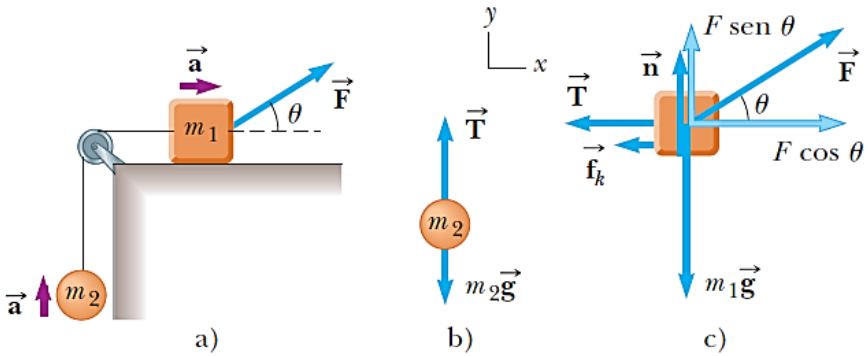


Figura 5.20 (Ejemplo 5.13) a) La fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada como se muestra puede hacer que el bloque acelere hacia la derecha. b) y c) Diagramas de cuerpo libre que suponen que el bloque acelera hacia la derecha y la bola acelera hacia arriba. La magnitud de la fuerza de fricción cinética en este caso está dada por $f_k = \mu_k n = \mu_k (m_1 g - F \operatorname{sen} \theta)$.

SOLUCIÓN

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta al bloque en la dirección horizontal:

$$1) \quad \sum F_x = F\cos\theta - f_k - T = m_1 a_x = m_1 a$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al bloque en la dirección vertical:

$$2) \quad \sum F_y = n + F\operatorname{sen}\theta - m_1 g = 0$$

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta a la bola en la dirección vertical:

$$3) \quad \sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y = m_2 a$$

Resuelva la ecuación 2) para n:

$$n = m_1 g - F\operatorname{sen}\theta$$

Sustituya n en $f_k = \mu_k n$ de la ecuación 5.10:

$$4) \quad f_k = \mu_k (m_1 g - F\operatorname{sen}\theta)$$

Sustituya la ecuación 4) y el valor de T de la ecuación 3) en la ecuación 1):

$$F\cos\theta - \mu_k (m_1 g - F\operatorname{sen}\theta) - m_2 (a + g) = m_1 a$$

Resuelva para a:

$$5) \quad a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k \operatorname{sen}\theta) - (m_2 + \mu_k m_1) g}{m_1 + m_2}$$

Resumen

DEFINICIONES

Un **marco de referencia inercial** es un marco en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero. Cualquier marco que se mueva con velocidad constante en relación con un marco inercial también es un marco inercial.

La **fuerza** se define como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto.**

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La **primera ley de Newton** establece que es posible encontrar un marco inercial en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero o, de manera equivalente, en ausencia de una fuerza externa, cuando se observa desde un marco inercial, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento uniforme en línea recta mantiene dicho movimiento.

La **segunda ley de Newton** afirma que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.

La **tercera ley de Newton** postula que, si dos objetos interactúan, la fuerza que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1.

La **fuerza gravitacional** que se ejerce sobre un objeto es igual al producto de su masa (una cantidad escalar) y la aceleración de caída libre: $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$.

El **peso** de un objeto es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto.

La **máxima fuerza de fricción estática** $\vec{\mathbf{f}}_{s,\text{máx}}$ entre un objeto y una superficie es proporcional a la fuerza normal que actúa sobre el objeto. En general, $f_s \leq \mu_s n$, donde μ_s es el **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal. Cuando un objeto se desliza sobre una superficie, la magnitud de la **fuerza de fricción cinética** $\vec{\mathbf{f}}_k$ está dada por $f_k = \mu_k n$, donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética**. La dirección de la fuerza de fricción es opuesta a la dirección del movimiento o movimiento inminente del objeto en relación con la superficie.

Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

- Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme
- Movimiento circular no uniforme
- Movimiento en marcos acelerados
- Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

Los pasajeros en una montaña rusa "serpenteante" experimentan una fuerza radial hacia el centro de la pista circular y una fuerza hacia abajo debida a la gravedad.

Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme

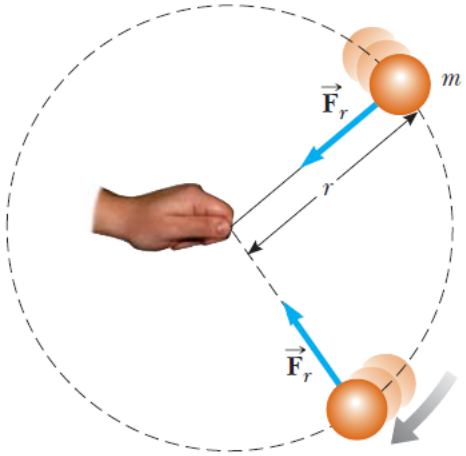


Figura 6.1 Vista superior de una bola móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal. Una fuerza $\vec{F}_r$ dirigida hacia el centro del círculo mantiene a la bola móvil en su trayectoria circular.

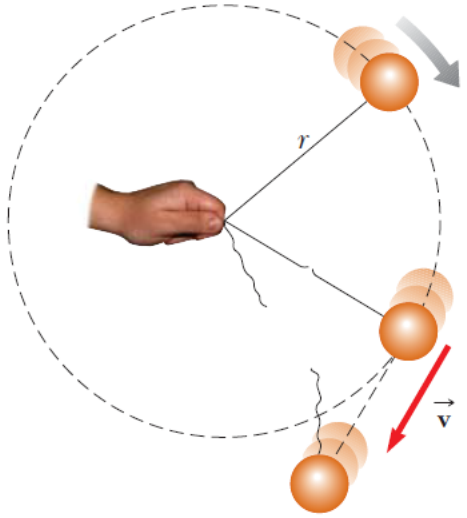


Figura 6.2 Vista superior de una bola móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal. Cuando la cuerda se rompe, la bola se traslada en dirección tangente al círculo.

$$F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

EJEMPLO 6.1 El péndulo cónico

Una pequeña bola de masa m se suspende de una cuerda de longitud L. La bola da vueltas con rapidez constante v en un círculo horizontal de radio r, como se muestra en la figura 6.3. (Puesto que la cuerda hace un recorrido de la superficie en forma de cono, el sistema se conoce como *péndulo cónico*.) Encuentre una expresión para v.

SOLUCIÓN

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección vertical:

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

$$1) \quad T\cos\theta = mg$$

Use la ecuación 6.1 para expresar la fuerza que proporciona la aceleración centrípeta en la dirección horizontal:

$$2) \quad \sum F_x = T\,\text{sen}\,\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) y use $\text{sen}\,\theta/\cos\theta = \tan\theta$:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para v:

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Incorpore $r = L\,\text{sen}\,\theta$ a partir de la geometría a la figura 6.3a:

$$v = \sqrt{Lg\,\text{sen}\,\theta\tan\theta}$$

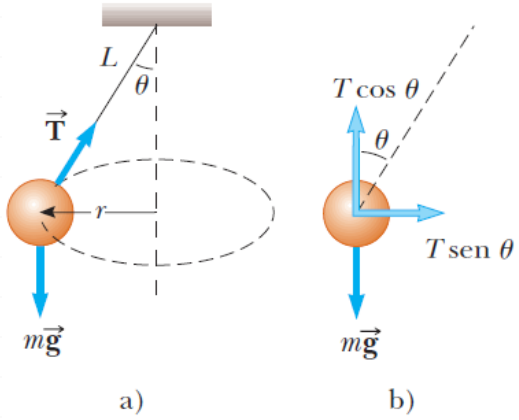


Figura 6.3 (Ejemplo 6.1) a) Péndulo cónico. La trayectoria del objeto es un círculo horizontal. b) Diagrama de cuerpo libre para el objeto.

EJEMPLO 6.2 ¿Qué tan rápido puede girar?

Una bola de 0.500 kg de masa se une al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. La bola da vueltas en un círculo horizontal como se muestra en la figura 6.1. Si la cuerda resiste una tensión máxima de 50.0 N, ¿cuál es la máxima rapidez a la que gira la bola antes de que se rompa la cuerda? Suponga que la cuerda permanece horizontal durante el movimiento.

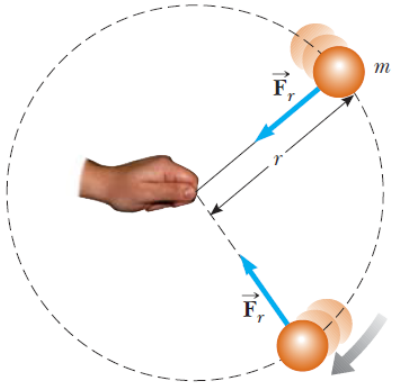


Figura 6.1 Vista superior de una bola móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal. Una fuerza $\vec{F}_r$ dirigida hacia el centro del círculo mantiene a la bola móvil en su trayectoria circular.

SOLUCIÓN

Analizar Incorpore la tensión y la aceleración centrípeta en la segunda ley de Newton:

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para v:

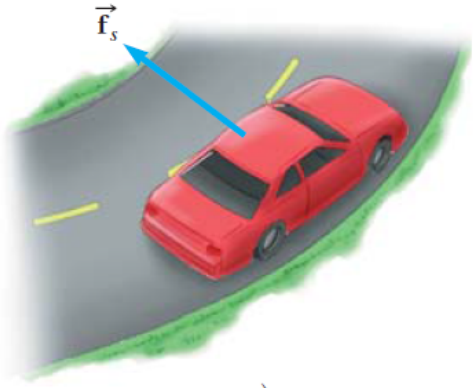
$$1) \quad v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

Encuentre la rapidez máxima que puede tener la bola, que corresponde a la tensión máxima que la cuerda resiste:

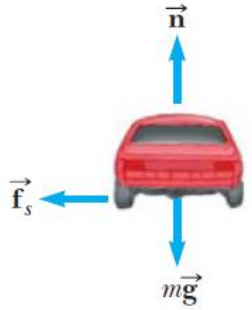
$$v_{máx} = \sqrt{\frac{T_{máx}r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0\ \text{N})(1.50\ \text{m})}{0.500\ \text{kg}}} = 12.2\ \text{m/s}$$

EJEMPLO 6.3 ¿Cuál es la máxima rapidez del automóvil?

Un automóvil de 1 500 kg, se traslada sobre una curva, plana horizontal como se muestra en la figura 6.4a. Si el radio de la curva es 35.0 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0.523, encuentre la rapidez máxima que alcanza el automóvil y aún así da la vuelta exitosamente.



a)



b)

Figura 6.4 (Ejemplo 6.3) a) La fuerza de fricción estática dirigida hacia el centro de la curva mantiene al automóvil en movimiento en una trayectoria circular. b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil.

SOLUCIÓN

Analizar La fuerza que le permite al automóvil permanecer en su trayectoria circular es la fuerza de fricción estática. (Es *estática* porque no ocurre deslizamiento en el punto de contacto entre camino y llantas. Si esta fuerza de fricción estática fuese cero —por ejemplo, si el automóvil estuviese sobre un camino congelado— el automóvil continuaría en una línea recta y se deslizaría hasta salir del camino.) La rapidez máxima $v_{máx}$ que puede tener el automóvil alrededor de la curva es la rapidez a la que está a punto de derrapar hacia afuera. En este punto, la fuerza de fricción tiene su valor máximo $f_{s,\,máx} = \mu_s n$.

1) $$f_{s,máx} = \mu_s n = m\frac{v_{máx}^2}{r}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad n - mg = 0 \quad \rightarrow \quad n = mg$$

2) $$v_{máx} = \sqrt{\frac{\mu_s nr}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s mgr}{m}} = \sqrt{\mu_s gr}$$

Advierta que la rapidez máxima no depende de la masa del automóvil

$$= \sqrt{(0.523)(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = 13.4\ \text{m/s}$$

¿Qué pasaría si? Suponga que un automóvil viaja por esta curva en un día húmedo y comienza a derrapar en la curva cuando su rapidez llega sólo a 8.00 m/s. ¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de fricción estática en este caso?

Respuesta El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el camino húmedo debe ser menor que el existente entre las llantas y un camino seco. Esta expectativa concuerda con la experiencia de conducir, porque un derrape es más probable en un camino húmedo que en un camino seco.

Para comprobar la sospecha, se puede resolver la ecuación (2) para el coeficiente de fricción estática:

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{gr}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{gr} = \frac{(8.00\ \text{m/s})^2}{(9.80\ \text{m/s}^2)(35.0\ \text{m})} = 0.187$$

que de hecho es más pequeño que el coeficiente de 0.523 para el camino seco.

EJEMPLO 6.4 La autopista peraltada

Un ingeniero civil quiere rediseñar la curva de la autopista del ejemplo 6.3 en tal forma que un automóvil no tenga que depender de la fricción para circular la curva sin derrapar. En otras palabras, un automóvil que se traslada a la rapidez diseñada puede superar la curva incluso cuando el camino esté cubierto con hielo. Dicha rampa será *peraltada*, lo que significa que la carretera está inclinada hacia el interior de la curva. Suponga que la rapidez diseñada para la rampa es 13.4 m/s (30.0 mi/h) y el radio de la curva es 35.0 m. ¿Cuál es el ángulo de peralte?

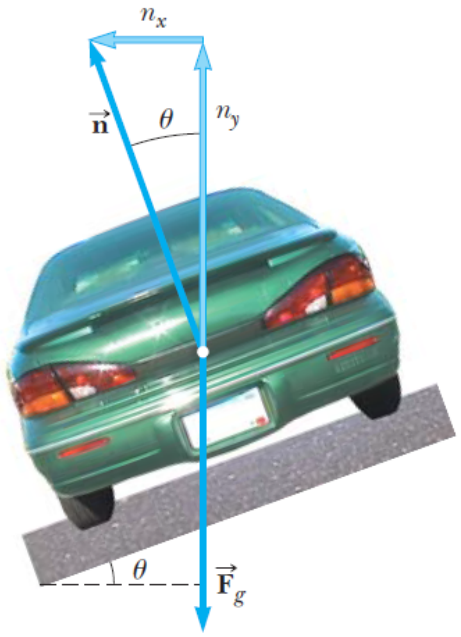


Figura 6.5 (Ejemplo 6.4) Un automóvil que recorre una curva sobre un camino peraltado a un ángulo θ con la horizontal. Cuando la fricción es despreciable, la fuerza que causa la aceleración centrípeta y mantiene al automóvil en movimiento en su trayectoria circular es la componente horizontal de la fuerza normal.

SOLUCIÓN

Analizar En un camino a nivel (sin peralte), la fuerza que causa la aceleración centrípeta es la fuerza de fricción estática entre el automóvil y el camino, como se vio en el ejemplo precedente. Sin embargo, si el camino está peraltado en un ángulo θ, como en la figura 6.5, la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ tiene una componente horizontal hacia el centro de la curva. Puesto que la rampa se diseña de modo que la fuerza de fricción estática sea cero, sólo la componente $n_x = n \operatorname{sen} \theta$ causa la aceleración centrípeta.

Escriba la segunda ley de Newton para el automóvil en la dirección radial, que es la dirección x:

$$1) \quad \sum F_r = n \operatorname{sen} \theta = \frac{mv^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = n \cos \theta - mg = 0$$

$$2) \quad n \cos \theta = mg$$

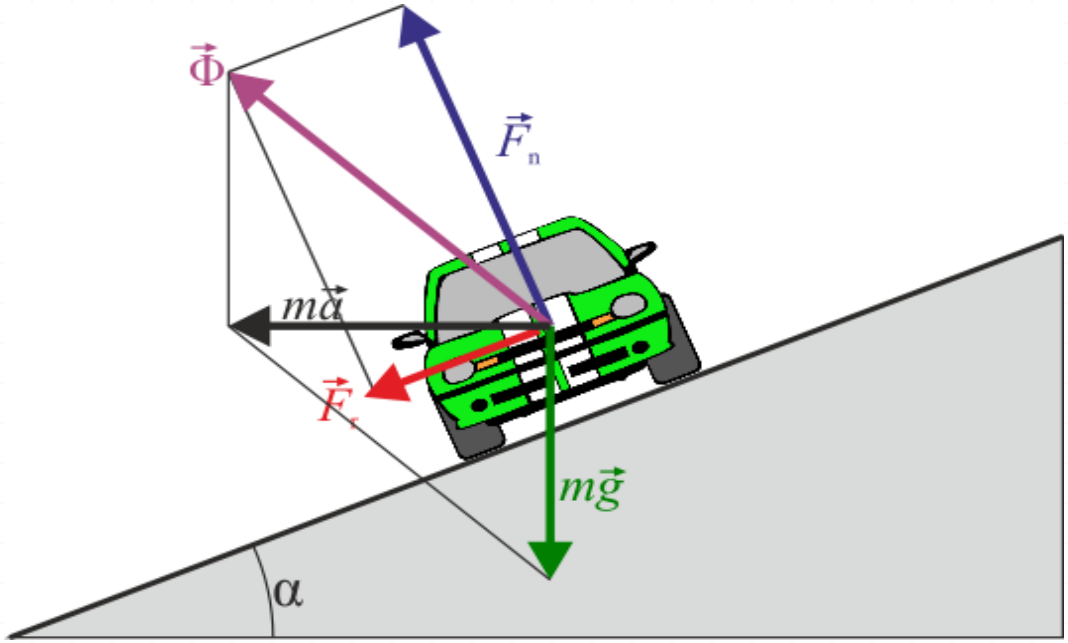
Divida la ecuación 1) entre la ecuación 2):

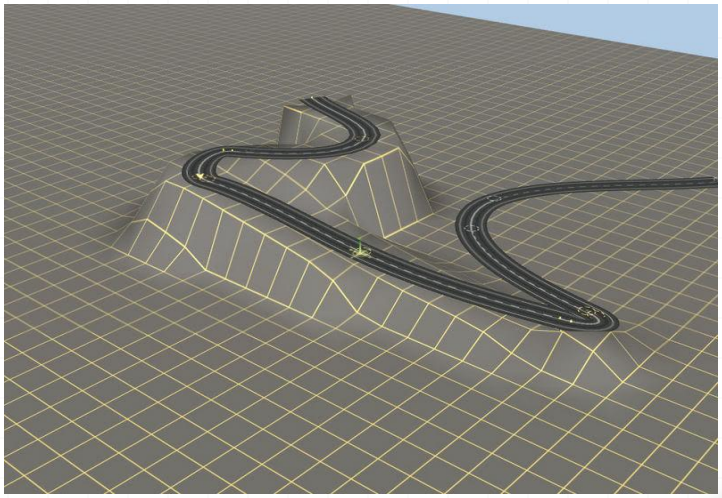
$$3) \quad \tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(13.4 \text{ m/s})^2}{(35.0 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)}\right) = 27.6°$$

Finalizar La ecuación 3) muestra que el ángulo de peralte es independiente de la masa del vehículo que entra a la curva. Si un automóvil recorre la curva con una rapidez menor que 13.4 m/s, se necesita fricción para evitar que se deslice por el peralte (hacia la izquierda en la figura 6.5). Un conductor que intente superar la curva a una rapidez mayor que 13.4 m/s tiene que depender de la fricción para evitar que derrape afuera del peralte (hacia la derecha en la figura 6.5).





CAÍDA LIBRE CONSIDERANDO RESISTENCIA CONSTANTE

La segunda ley de Newton establece que la fuerza es igual a la masa multiplicada por la aceleración, suponiendo que la masa es constante. Se puede expresar esto mediante la ecuación:

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

Donde F representa la fuerza total de que actúa sobre el objeto, m es la masa del objeto y dv/dt, la aceleración.

Cerca de la superficie de la Tierra, la fuerza debida a la gravedad es precisamente el peso del objeto. Esta fuerza se puede expresar por mg, donde g es la aceleración debida a la gravedad.

No hay ley general alguna que determine exactamente la resistencia del aire que actúa sobre el objeto, ya que la fuerza parece depender de la velocidad del objeto, la densidad del aire y forma del objeto, entre otros factores.

Sin embargo, en ciertos casos la resistencia del aire se puede representar razonablemente con $-kv$, donde k es una constante positiva que depende de la densidad del aire y la forma del objeto. Se usa el signo menos porque la resistencia del aire es una fuerza que se opone al movimiento.

Al aplicar la ley de Newton se obtiene la ecuación diferencial de primer orden:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Esta ecuación se puede resolver usando **separación de variables**. Al tratar dv y dt como diferenciales, se separan las variables para obtener:

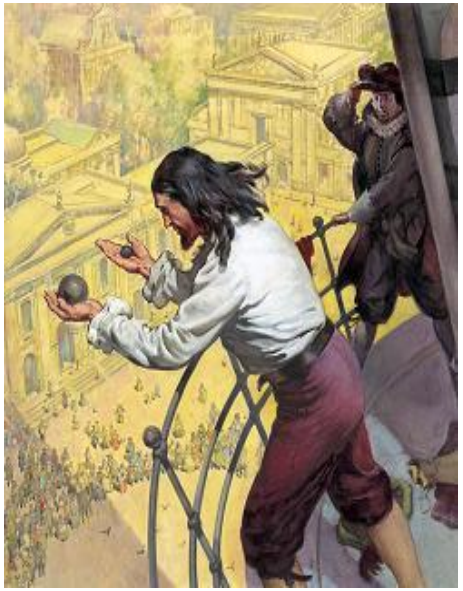
$$\frac{dv}{(mg - kv)} = \frac{dt}{m}$$

Integrando, resulta:

$$\int \frac{dv}{mg - kv} = \int \frac{dt}{m} + C$$

$$\Rightarrow \qquad -(1/k)ln(mg - kv) = (t/m) + C,$$

Donde C es una “constante de integración”.



CAÍDA LIBRE CONSIDERANDO RESISTENCIA CONSTANTE

En la última ecuación se puede despejar v para obtener:

$$v = (mg / k) - e^{-kC} e^{-kt/m} / k$$

La cual se llama **solución general** de la ecuación diferencial.

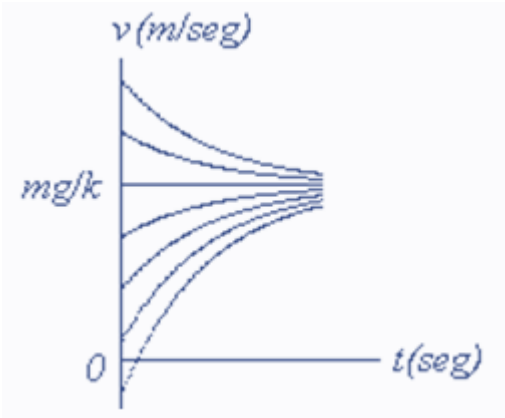
En un caso específico los valores de m, g y k ya estarían dados. Para determinar la constante C de la solución general se puede usar la velocidad inicial del objeto v_0. Esto es, se resuelve el **problema de valor inicial**:

Sustituyendo $v = v_0$ y $t = 0$ en la solución general de la ecuación diferencial, se puede despejar e^{-kC}. Con este valor, la solución del problema de valor inicial es:

$$v = mg/k + (v_0 - mg/k)\, e^{-kt/m}$$

Cuya gráfica $v(t)$ se muestra para varias velocidades iniciales v_0. ($g = 9.8\, m/s^2, m / k = 5$).

La fórmula anterior proporciona la velocidad del objeto en caída a través del aire en función del tiempo, si la velocidad inicial del objeto es v_0.



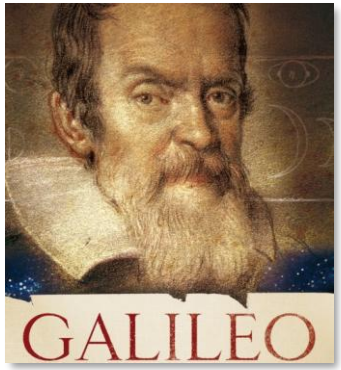
En la gráfica se aprecia que v tiende a mg/k sin importar la velocidad inicial v_0. (Lo que es fácil de notar haciendo que $t \to \infty$).

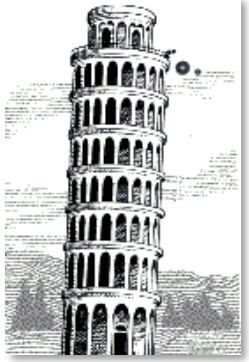
La constante mg/k se conoce como **velocidad terminal** del objeto.

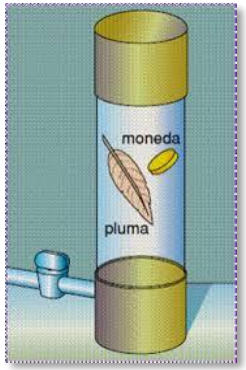
CAÍDA LIBRE CONSIDERANDO RESISTENCIA CONSTANTE

A partir de este modelo para un cuerpo en caída es posible hacer ciertas observaciones:

Puesto que $e^{-kt/m}$ tiende rápidamente la velocidad terminal que es igual al peso mg dividido por el coeficiente de la resistencia del aire k. De esta manera, en presencia de resistencia del aire, mientras más pesado sea el objeto, más rápido caerá. En forma análoga, a menor resistencia del aire, más rápido caerá un objeto. Estas observaciones concuerdan, desde luego, con nuestra experiencia.

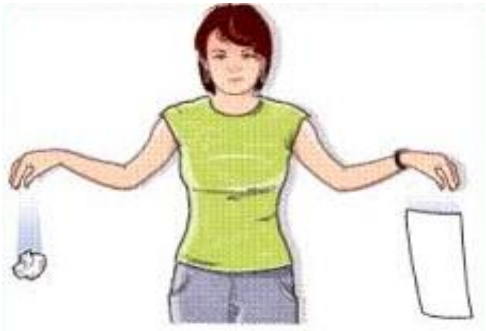






Dos objetos caerán con la misma aceleración y sin velocidad terminal solo en el vacío.

Todos los objetos caerán con una velocidad terminal.



La velocidad de caída de un objeto no solo depende de su masa, también depende del área de enfrentamiento al aire que presente.

EJEMPLO 6.5 ¡A hacer el rizo!

Un piloto de masa m en un avión jet ejecuta un rizo, como se muestra en la figura 6.6a. En esta maniobra, el avión se mueve en un círculo vertical de 2.70 km de radio con una rapidez constante de 225 m/s.

A) Determine la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte inferior del rizo. Exprese su respuesta en términos del peso del piloto mg.

B) Resolver para la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte superior del rizo.

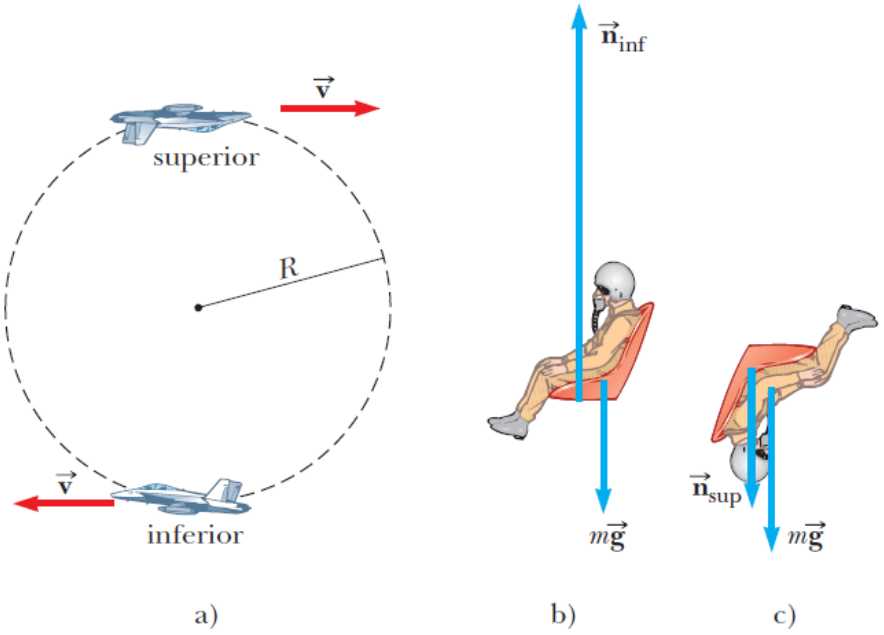


Figura 6.6 (Ejemplo 6.5) a) Un avión ejecuta un rizo mientras se mueve en un círculo vertical con rapidez constante. b) Diagrama de cuerpo libre del piloto en la parte inferior del rizo. En esta posición, el piloto experimenta un peso aparente mayor que su peso verdadero. c) Diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte superior del rizo.

SOLUCIÓN

A)

Aplique la segunda ley de Newton al piloto en la dirección radial:

$$\sum F = n_{inf} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

Resuelva para la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto:

$$n_{inf} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

Sustituya los valores dados para la rapidez y el radio:

$$n_{inf} = mg\left(1 + \frac{(225\ \text{m/s})^2}{(2.70 \times 10^3\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)}\right)$$

$$= 2.91\,mg$$

Por tanto, la magnitud de la fuerza $\vec{n}_{inf}$ que ejerce el asiento sobre el piloto es *mayor* que el peso del piloto por un factor de 2.91. De este modo, el piloto experimenta un peso aparente que es mayor que su peso verdadero en un factor de 2.91.

B)

Analizar En la figura 6.6c se muestra el diagrama de cuerpo libre para el piloto en la parte superior del rizo. Como ya se notó, tanto la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra como la fuerza $\vec{\mathbf{n}}_{\text{sup}}$ que ejerce el asiento sobre el piloto actúan hacia abajo, de modo que la fuerza neta hacia abajo que proporciona la aceleración centrípeta tiene una magnitud $n_{\text{sup}} + mg$.

Aplique la segunda ley de Newton al piloto en esta posición:

$$\sum F = n_{\text{sup}} + mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{\text{sup}} = m\frac{v^2}{r} - mg = mg\left(\frac{v^2}{rg} - 1\right)$$

$$n_{\text{sup}} = mg\left(\frac{(225\ \text{m/s})^2}{(2.70 \times 10^3\ \text{m})(9.80\ \text{m/s}^2)} - 1\right)$$

$$= 0.913mg$$

En este caso, la magnitud de la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto es *menor* que su peso verdadero en un factor de 0.913, y el piloto se siente más ligero.

¿Qué pasaría si?

El piloto del ejemplo 6.5 se expulsara del avión en la parte de inferior del rizo con una velocidad vertical de 30 km/h.

Si m/k = 3 y el piloto pesa con todo y asiento 144 kg. ¿Cuál sería su velocidad terminal de caída, en cuanto tiempo la alcanzaría y después de caer cuanta altura?

Modelo 2: Fuerza resistiva proporcional a la rapidez al cuadrado del objeto

Para objetos móviles con magnitudes de velocidad grandes a través del aire, como aviones, paracaidistas, automóviles y pelotas de beisbol, razonablemente la fuerza resistiva se representa con propiedad como proporcional al cuadrado de la rapidez. En estas situaciones, la magnitud de la fuerza resistiva se expresa como

$$R = \tfrac{1}{2} D\rho A v^2 \tag{6.6}$$

donde D es una cantidad empírica adimensional llamada *coeficiente de arrastre*, ρ es la densidad del aire y A es el área de sección transversal del objeto móvil observado en un plano perpendicular a su velocidad. El coeficiente de arrastre tiene un valor casi de 0.5 para objetos esféricos, pero puede tener un valor tan grande como 2 para objetos con forma irregular.

Analice el movimiento de un objeto en caída libre expuesto a una fuerza resistiva del aire hacia arriba de magnitud $R = \frac{1}{2} D\rho A v^2$. Suponga que un objeto de masa m se libera desde el reposo. Como muestra la figura 6.14, el objeto experimenta dos fuerzas externas:[2] la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza resistiva hacia arriba $\vec{\mathbf{R}}$. En consecuencia, la magnitud de la fuerza neta es

$$\sum F = mg - \tfrac{1}{2} D\rho A v^2 \tag{6.7}$$

donde se toma hacia abajo como la dirección vertical positiva. Al usar la fuerza en la ecuación 6.7 en la segunda ley de Newton, se encuentra que el objeto tiene una aceleración hacia abajo de magnitud

$$a = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right) v^2 \tag{6.8}$$

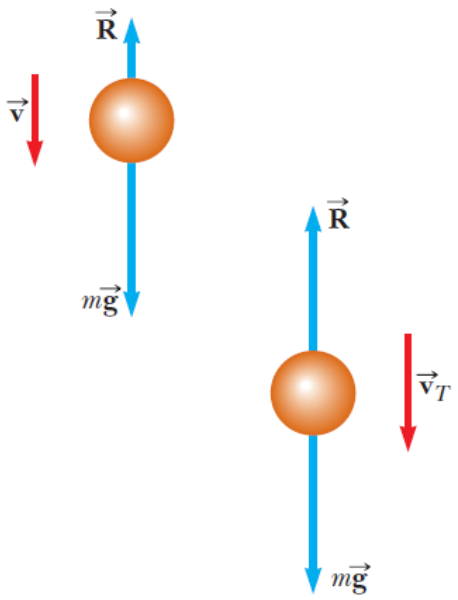


Figura 6.14 Un objeto que cae a través del aire experimenta una fuerza resistiva $\vec{\mathbf{R}}$ y una fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$. El objeto logra la rapidez terminal (a la derecha) cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero; esto es: cuando $\vec{\mathbf{R}} = -\vec{\mathbf{F}}_g$ o $R = mg$.

Modelo 2: Fuerza resistiva proporcional a la rapidez al cuadrado del objeto

La rapidez terminal v_T se puede calcular al notar que, cuando la fuerza gravitacional se equilibra mediante la fuerza resistiva, la fuerza neta sobre el objeto es cero y debido a eso su aceleración es cero. Al hacer $a = 0$ en la ecuación 6.8 se obtiene

$$g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right) v_T^2 = 0$$

de modo que

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \tag{6.9}$$

TABLA 6.1

Rapidez terminal para varios objetos que caen a través del aire

Objeto	Masa (kg)	Área de sección transversal (m^2)	v_T (m/s)
Paracaidista	75	0.70	60
Pelota de beisbol (3.7 cm de radio)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Pelota de golf (2.1 cm de radio)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Granizo (0.50 cm de radio)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Gota de lluvia (0.20 cm de radio)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

EJEMPLO 6.11 Fuerza resistiva ejercida sobre una pelota de beisbol

Un lanzador arroja una pelota de beisbol de 0.145 kg a un lado del bateador a 40.2 m/s (= 90 mi/h). Encuentre la fuerza resistiva que actúa sobre la pelota con esta rapidez.

SOLUCIÓN

Analizar Para determinar el coeficiente de arrastre D, imagine que suelta la pelota y la deja llegar a su rapidez terminal. Resuelva la ecuación 6.9 para D y sustituya los valores apropiados para m, v_T y A de la tabla 6.1, y considere la densidad del aire como 1.20 kg/m^3:

$$D = \frac{2mg}{v_T^2 \rho A} = \frac{2(0.145\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{(43\ \text{m/s})^2(1.20\ \text{kg/m}^3)(4.2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)}$$

$$= 0.305$$

Use este valor para D en la ecuación 6.6 para encontrar la magnitud de la fuerza resistiva:

$$R = \tfrac{1}{2} D\rho A v^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(0.305)(1.20\ \text{kg/m}^3)(4.2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(40.2\ \text{m/s})^2$$

$$= 1.2\ \text{N}$$

Finalizar La magnitud de la fuerza resistiva es similar en magnitud al peso de la pelota de beisbol, que es casi 1.4 N. Por lo tanto, la resistencia del aire desempeña un papel importante en el movimiento de la pelota, como se manifiesta por la variedad de curvas, "de columpio" (hacia abajo), "dormilona" y demás que lanzan los pitchers.

Resumen

DEFINICIONES

Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una aceleración centrípeta; esta aceleración la proporciona una fuerza neta que se dirija hacia el centro de la trayectoria circular.

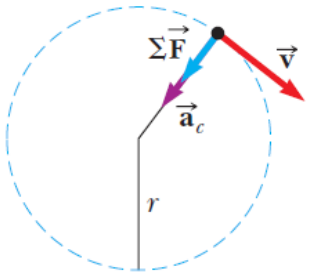
Un observador en un marco de referencia no inercial (acelerado) introduce **fuerzas ficticias** cuando aplica la segunda ley de Newton en dicho marco.

Un objeto móvil a través de un líquido o gas experimenta una **fuerza resistiva** dependiente de la rapidez. Esta fuerza resistiva está en dirección opuesta a la velocidad del objeto en relación con el medio y por lo general aumenta con la rapidez. La magnitud de la fuerza resistiva depende del tamaño y forma del objeto y de las propiedades del medio a través del que se mueve el objeto. En el caso límite para un objeto que cae, cuando la magnitud de la fuerza resistiva es igual al peso del objeto, éste alcanza su **rapidez terminal**.

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Partícula en movimiento circular uniforme Con el nuevo conocimiento de las fuerzas, se pueden hacer agregados al modelo de una partícula en movimiento circular uniforme, que se introdujo en el capítulo 4. La segunda ley de Newton aplicada a una partícula en movimiento circular uniforme establece que la fuerza neta que permite a la partícula someterse a una aceleración centrípeta (ecuación 4.15) se relaciona con la aceleración de acuerdo con

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad (6.1)$$



Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

Sistemas y entornos

Trabajo invertido por una fuerza constante

Producto escalar de dos vectores

Trabajo consumido por una fuerza variable

Energía cinética y el teorema trabajo–energía cinética

Energía potencial de un sistema

Fuerzas conservativas y no conservativas

Correspondencia entre fuerzas conservativas y energía potencial

Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

En una granja de viento, el aire en movimiento realiza trabajo sobre las aspas de los molinos, lo que hace girar las aspas y el rotor de un generador eléctrico. La energía se transfiere afuera del sistema del molino de viento mediante electricidad.

Energía de un sistema

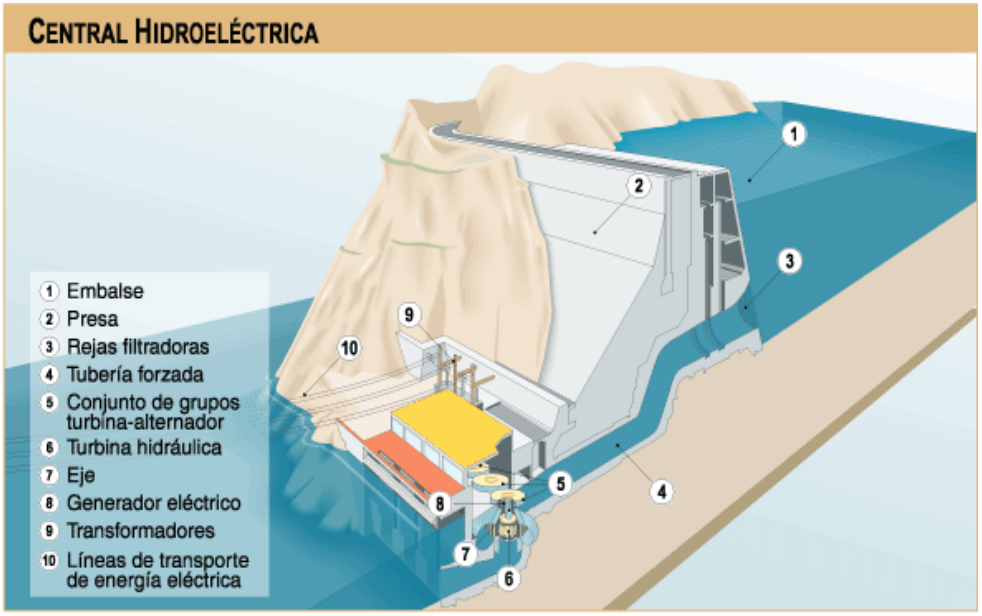
La palabra *Energía* viene del latín **energía**, y este del vocablo griego ενζργεια, que significa: eficacia, poder, virtud para obrar.

También se tienen los significados comunes: fuerza de voluntad, vigor y tesón en la actividad.

Para la Física, *energía* significa: Causa capaz de transformarse en trabajo mecánico.

La energía es una cantidad matemática que puede manifestarse de diversas maneras (energía cinética, química, radiante, etc.) y transformarse de una forma a otra.

Cuando se trata de un sistema cerrado (conjunto de elementos delimitado), la energía total presente en su interior se conserva inalterada, sin importar los fenómenos o cambios que ocurran en dicho sistema o las transformaciones de la energía de una forma a otra.



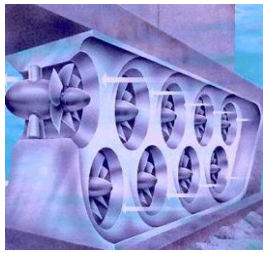
TIPOS DE ENERGÍA

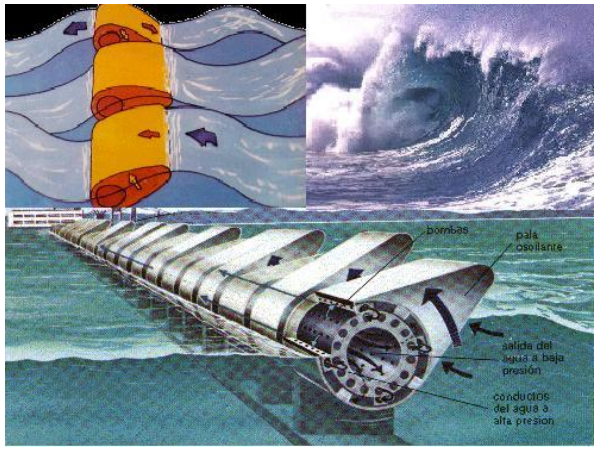
Existen muchas formas en que la energía de los sistemas físicos puede manifestarse.

Por ejemplo:

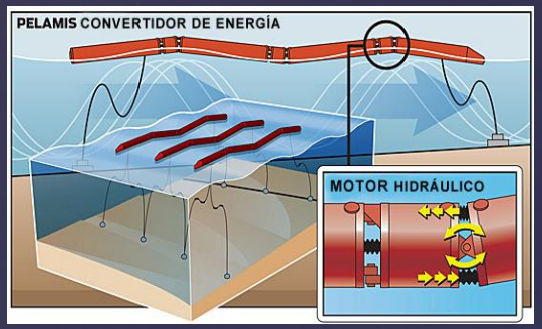
- **Energía cinética:** la que posee un cuerpo por razón de su movimiento.
- **Energía de ionización:** la mínima necesaria para ionizar una molécula o átomo en estado normal.
- **Energía química:** la que permite a los diferentes átomos y moléculas generar compuestos diversos.
- **Energía nuclear:** la obtenida por la fusión o fisión de núcleos atómicos; y que con fines industriales se obtiene en las centrales nucleares.
- **Energía potencial:** la que posee un cuerpo por el hecho de hallarse en un campo de fuerzas, por ejemplo, el de la gravedad.
- **Energía radiante:** la existente en un medio físico, causada por ondas electromagnéticas o fotones, mediante las cuales se propaga directamente sin desplazamiento de la materia.

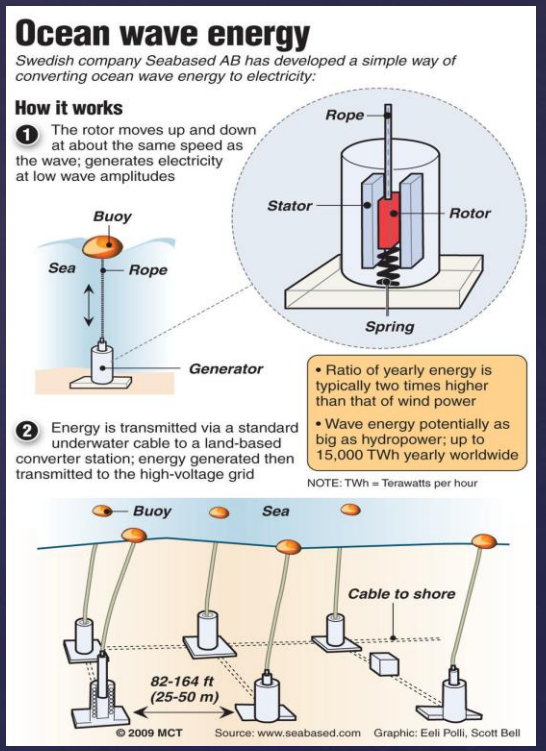
Energía para el consumo humano

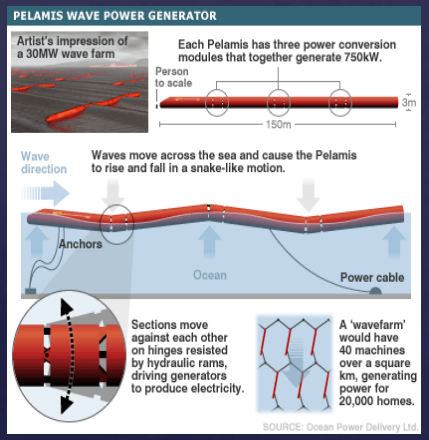


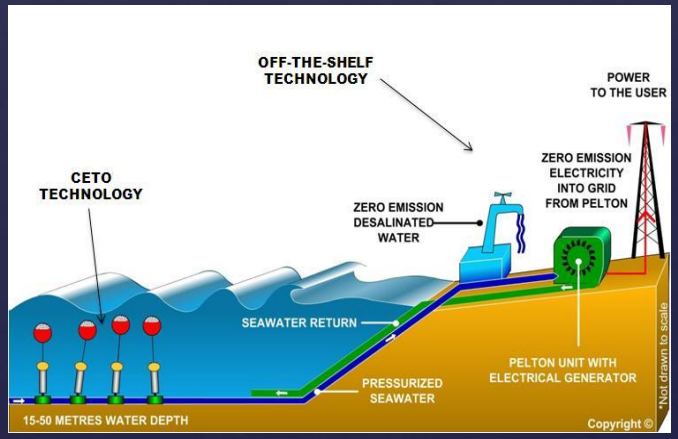


TIPOS DE ENERGÍA





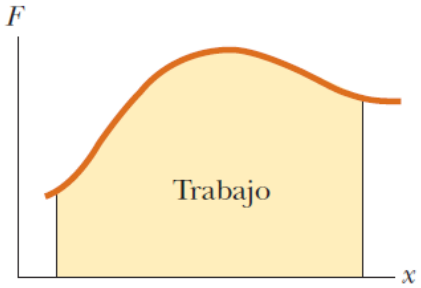




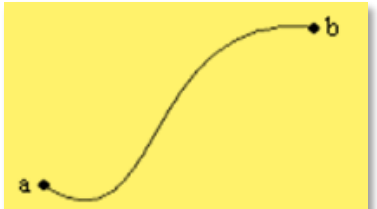
Puente con Turbinas Eólicas

TRABAJO

En mecánica se puede definir la energía como la capacidad de realizar un trabajo:



$$W = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$



Trayectoria seguida por un objeto al aplicarle una fuerza

Como todo trabajo físico implica una fuerza es bueno recordar que en la naturaleza solo existen cuatro tipos de fuerza, estas son:

1. **Gravitacional:** se debe a las interacciones entre las masas de los entes físicos.
2. **Electromagnética:** se debe a las interacciones entre las cargas eléctricas.
3. **Nuclear Débil:** está relacionada con los procesos de desintegración y otras reacciones atómicas.
4. **Nuclear Fuerte:** es la que mantiene la estabilidad en los núcleos atómicos (la unión entre protones).

Sus intensidades relativas son las siguientes:

Fuerza Fuerte	$\rightarrow 1$
Fuerza Débil	$\rightarrow 10^{-2}$
Fuerza Electromagnética	$\rightarrow 10^{-2}$
Fuerza Gravitacional	$\rightarrow 10^{-38}$

Todas las otras fuerzas, como son: el empuje de las manos, la tensión de una cuerda y la fricción entre materiales tienen un trasfondo microscópico, pues se derivan de las interacciones entre los campos electromagnéticos de los átomos. Así que, son realmente de origen electromagnético.

ENERGÍA MECÁNICA

Sea $\boldsymbol{F}_{neta} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots + \boldsymbol{F}_n$ la suma de fuerzas aplicadas sobre un objeto, entonces el trabajo realizado por cada una de estas fuerzas en una trayectoria (del punto a al punto b) será:

$$W_1 = \int_a^b \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{s}\,, W_2 = \int_a^b \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{s}\,, \ldots$$

$$\therefore \quad W_{neto} = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Que también se puede expresar como:

$$W_{neto} = \int_a^b \boldsymbol{F}_{neta} \cdot d\boldsymbol{s}$$

ENERGÍA CINÉTICA

Y que para el caso en una dimensión se puede escribir simplemente como:

$$W_{neto} = \int_{x_i}^{x_f} F_{neta}\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad F_{neta} = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v \equiv mv\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad W_{neto} = \int_{x_i}^{x_f} F_{neta}\,dx = \int_{x_i}^{x_f} mv\frac{dv}{dx}\,dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv$$

$$\therefore \qquad W_{neto} = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

A la cantidad $mv^2/2$ se le llama ***Energía Cinética*** y se le denota con la letra K (de *kinetics* en inglés)

Así entonces:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \qquad W_{neto} = K_f - K_i = \Delta K\ [Joules]$$

Aunque el desarrollo se ha realizado para una dimensión su generalización a tres dimensiones es inmediata.

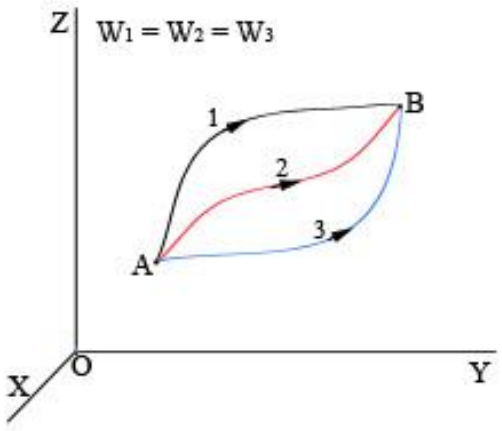
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

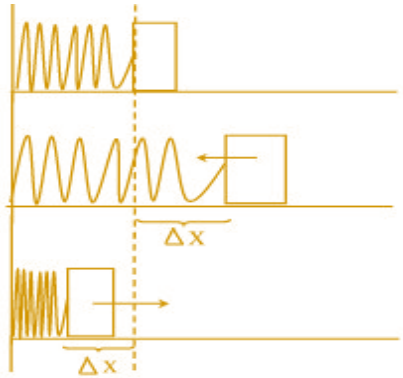
Fuerzas Conservativas:

Definición: si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza que no efectúe trabajo total durante un recorrido completo (cerrado) entonces la fuerza es conservativa. Este es el caso en un resorte que oscila horizontalmente, el trabajo realizado es cero en un ciclo completo.

La fuerza de gravedad es un ejemplo de fuerza conservativa; mientras que, la fuerza de fricción no es conservativa.

Si el trabajo efectuado por una fuerza para mover un cuerpo desde una posición inicial hasta una final es independiente de la trayectoria seguida entre ambos puntos, entonces la fuerza es conservativa, de lo contrario es no conservativa.





ley de Hooke $\vec{\mathbf{F}}_s = F_s\hat{\mathbf{i}} = -kx\hat{\mathbf{i}}$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_i^{\,2} - \tfrac{1}{2}kx_f^{\,2}$$

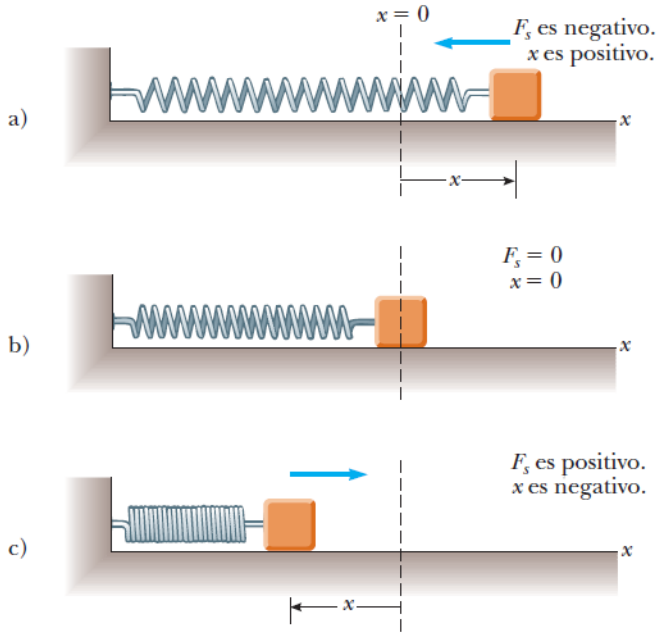
Trabajo consumido en un resorte

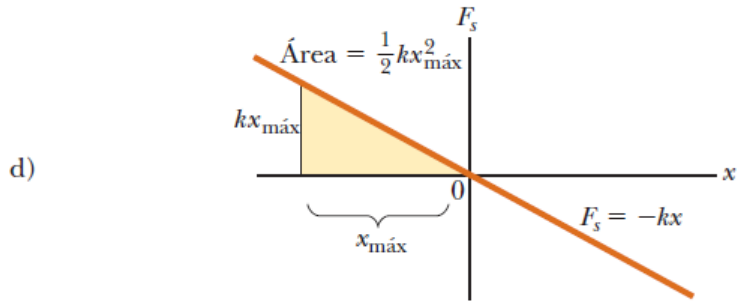
En la figura 7.9 se muestra un modelo de sistema físico común para el que la fuerza varía con la posición. Un bloque sobre una superficie horizontal sin fricción se conecta a un resorte. Para muchos resortes, si el resorte está estirado o comprimido una distancia pequeña desde su configuración sin estirar (en equilibrio), ejerce en el bloque una fuerza que se puede representar matemáticamente como

$$F_s = -kx \qquad (7.9)$$

◀ Fuerza de resorte

donde x es la posición del bloque en relación con su posición de equilibrio ($x = 0$) y k es una constante positiva llamada **constante de fuerza** o **constante de resorte** del resorte.





$$W_s = \int \vec{\mathbf{F}}_s \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{máx}}^{0} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2_{máx}$$

Figura 7.9 La fuerza que ejerce un resorte sobre un bloque varía con la posición x del bloque en relación con la posición de equilibrio $x = 0$. a) Cuando x es positivo (resorte estirado), la fuerza del resorte se dirige hacia la izquierda. b) Cuando x es cero (longitud natural del resorte), la fuerza del resorte es cero. c) Cuando x es negativo (resorte comprimido), la fuerza del resorte se dirige hacia la derecha. d) Gráfica de F_s en función de x para el sistema bloque–resorte. El trabajo invertido por la fuerza del resorte en el bloque cuando se traslada desde $-x_{máx}$ a 0 es el área del triángulo sombreado, $\frac{1}{2}kx^2_{máx}$.

ENERGÍA POTENCIAL

La energía potencial puede ser definida solo para fuerzas conservativas, como es el caso de la fuerza de un resorte o de la de gravedad.

La energía potencial se representa con el símbolo U y es la "energía de configuración" del sistema: $\Delta U \equiv -W$.

$$\therefore \qquad \Delta U + \Delta K = 0$$

El valor de la suma de U y K debe ser constante, por lo que la energía mecánica de un sistema conservativo queda definida por la expresión: $E \equiv U + K$.

Adicionalmente, en una dimensión, se tiene que la fuerza y la energía potencial están relacionadas mediante la expresión:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Esta expresión puede generalizarse a tres dimensiones considerando un potencial $U(x, y, z)$ donde:

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_i} F_x dx - \int_{y_i}^{y_i} F_y dy - \int_{z_i}^{z_i} F_z dz$$

que permite obtener:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U(x, y, z) = -\left(\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}\right)$$

Y que se puede denotar simplemente como: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -\nabla U(x, y, z)$

Donde debe ser claro que el símbolo ∇ (nabla) representa al operador gradiente: $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

SISTEMAS CONSERVATIVOS UNIDIMENSIONALES

Puesto que la energía potencial depende únicamente de la posición se tiene que:

$$\Delta U = -W = -\int_{x_i}^{x_f} F_{neta}\,dx$$

Entonces el cambio ΔU entre x_i y x_f es: $\Delta U = U(x_f) - U(x_i)$.

La elección del punto de referencia $U(x_i)$ es similar a la elección de un marco de referencia para la energía cinética. Observadores en diferentes marcos de referencia podrán medir diferentes valores de $U(x)$ y de $K(x)$ pero todos estarán de acuerdo en la constancia de E.

Ley de la Conservación de la Energía Mecánica:

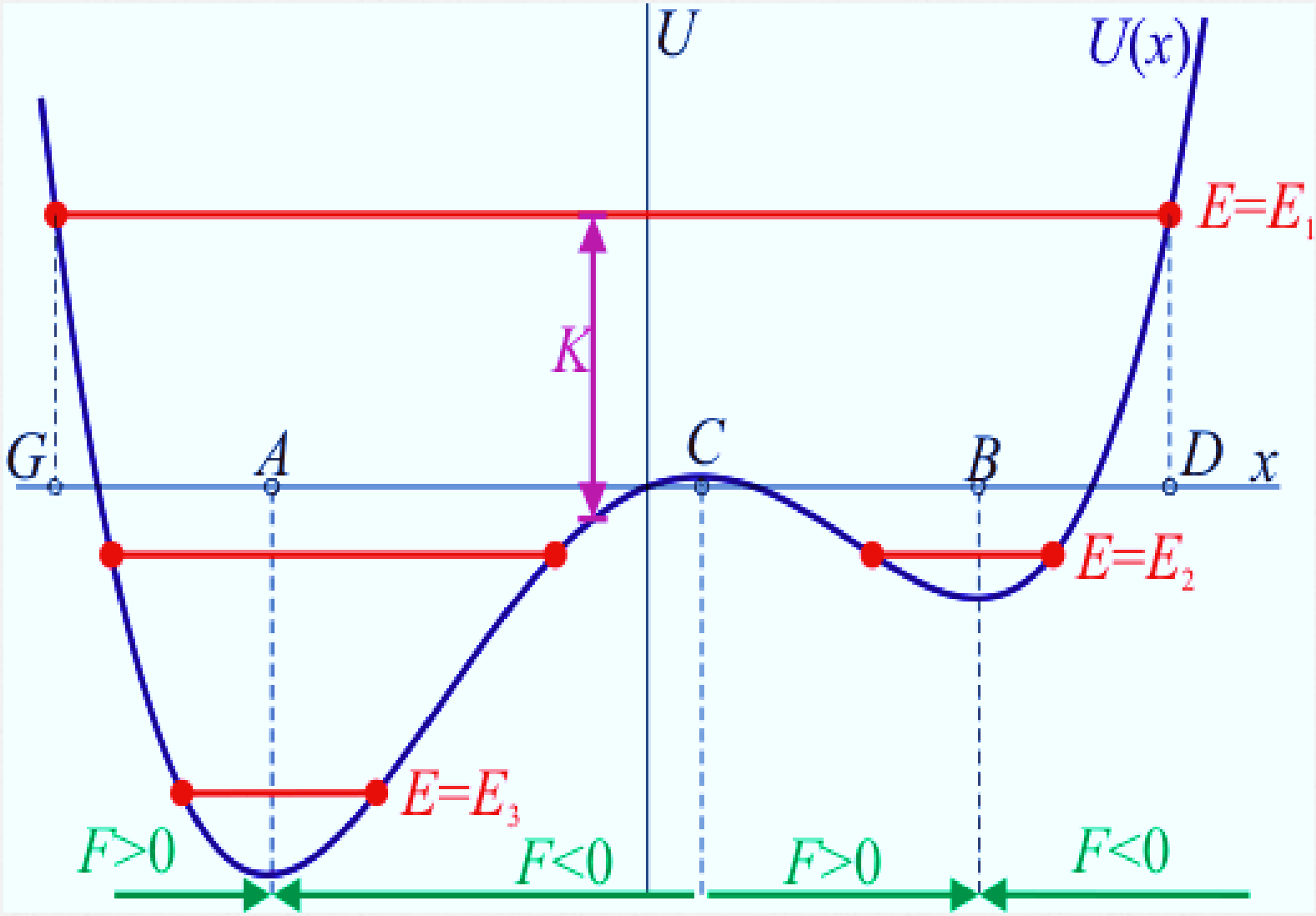
Ya que se puede escribir: $\Delta U + \Delta K = 0$

$$\Rightarrow \quad U(x_f) - U(x_i) + \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad U(x_i) + \frac{1}{2}mv_i^2 = U(x_f) + \frac{1}{2}mv_f^2$$

y como debe cumplirse para todos los puntos, entonces su valor debe ser una constante; es decir:

$$U(x_i) + \frac{1}{2}mv_i^2 = U(x_f) + \frac{1}{2}mv_f^2 = E$$


U
U(x)
E=E1
K
G
A
C
B
D
x
E=E2
E=E3
F>0
F<0
F>0
F<0

EJEMPLO 7.6 Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después de que se ha movido 3.0 m.

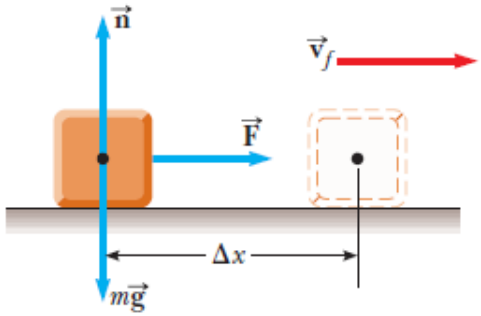


Figura 7.13 (Ejemplo 7.6) Bloque que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción mediante una fuerza horizontal constante.

SOLUCIÓN

Analizar La fuerza externa neta que actúa sobre el bloque es la fuerza horizontal de 12 N.

Hallar el trabajo invertido por esta fuerza en el bloque:

$$W = F\,\Delta x = (12\text{ N})(3.0\text{ m}) = 36\text{ J}$$

Use el teorema trabajo–energía para el bloque y note que su energía cinética inicial es cero:

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

Resuelva para v_f:

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(36\text{ J})}{6.0\text{ kg}}} = 3.5\text{ m/s}$$

Finalizar Le sería útil resolver este problema de nuevo, al representar el bloque como una partícula bajo una fuerza neta para encontrar su aceleración y luego como una partícula bajo aceleración constante para encontrar su velocidad final.

Pregunta rápida 7.5 Se carga un dardo en una pistola de juguete, accionada por resorte, al empujar el resorte hacia adentro una distancia x. Para la siguiente carga, el resorte se comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido deja la pistola el segundo dardo, en comparación con el primero? a) cuatro veces más rápido, b) dos veces más rápido, c) la misma, d) la mitad de rápido, e) un cuarto de rápido.

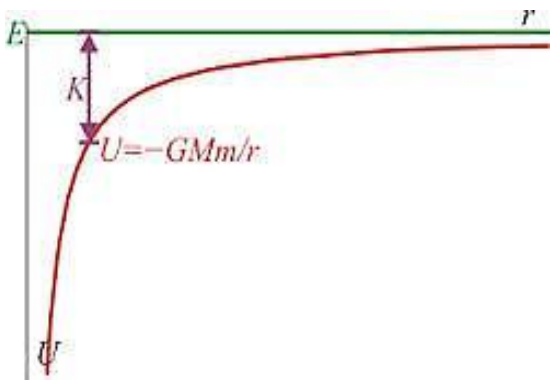
Energía potencial de un sistema

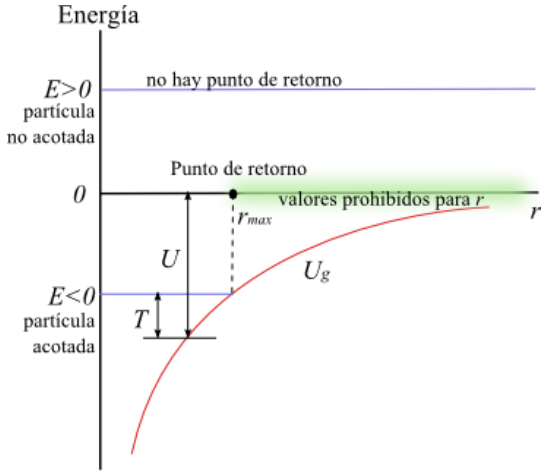
Para calcular la el potencial en el campo gravitacional se puede considerar, como punto de partida, una posición de referencia $y_0 = 0$ en el que claramente la energía potencial será $U(y_0) = 0$.

Entonces, con $F = mg$, se tiene que:

$$U(y) = \int_0^y -mg\,dy$$

$$\therefore \qquad U(y) = mgy$$

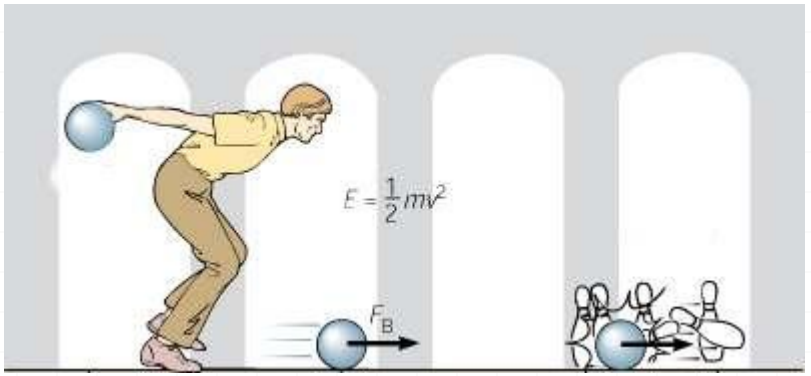




EJEMPLO 7.8 El bolichista y el dedo lastimado

Una bola de boliche sostenida por un bolichista descuidado se desliza de sus manos y cae sobre un dedo de su pie. Si elige el nivel del suelo como el punto $y = 0$ de su sistema coordenado, estime el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra mientras cae la bola.

Una bola de boliche tiene una masa de aproximadamente 7 kg, y la parte superior del dedo del pie de una persona está aproximadamente a 0.03 m sobre el suelo. Además, se debe suponer que la bola cae desde una altura de 0.5 m.



SOLUCIÓN

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra justo antes de que la bola de boliche se libere:

$$U_i = mgy_i = (7\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.5\ \text{m}) = 34.3\ \text{J}$$

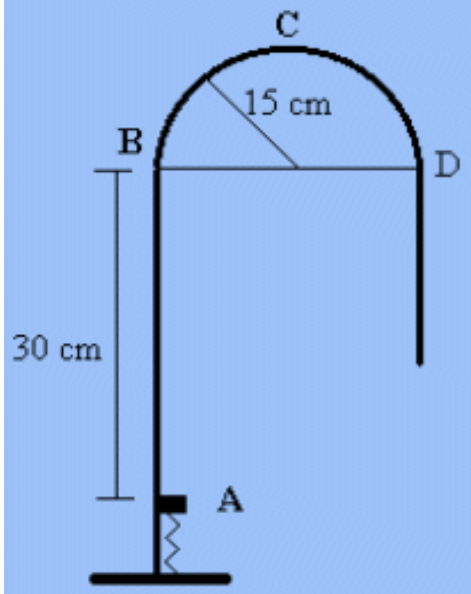
Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra cuando la bola llega al dedo del bolichista:

$$U_f = mgy_f = (7\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.03\ \text{m}) = 2.06\ \text{J}$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra:

$$\Delta U_g = 2.06\ \text{J} - 34.3\ \text{J} = -32.24\ \text{J}$$

EJEMPLO



Un bloque de 200 g permanece en reposo en A cuando el muelle de constante 500 N/m está comprimido 7.5 cm. Se suelta el dispositivo de sujeción y el bloque recorre el camino ABCD. Calcular:

- La velocidad del bloque cuando pasa por B, C y D.
- La reacción del raíl cuando pasa por el punto más alto, C.

SOLUCIÓN

Energías en A y en B

Las energías cinética E_k, potencial gravitatoria E_p, y elástica E_e son respectivamente

$$A\begin{cases} E_k = 0 \\ E_p = 0 \\ E_e = \frac{1}{2}\,500 \cdot 0.075^2 \end{cases} \qquad B\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}\,0.2v^2 \\ E_p = 0.2 \cdot 9.8 \cdot 0.3 \\ E_e = 0 \end{cases}$$

Conservación de la energía E_A=E_B.

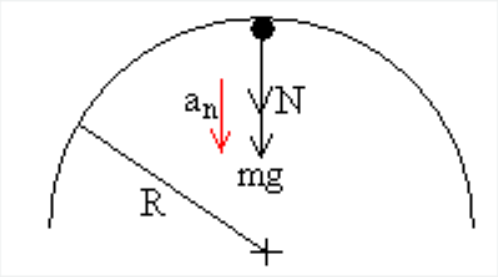
$$\frac{1}{2}\,500 \cdot 0.075^2 = 0.2 \cdot 9.8 \cdot 0.3 + \frac{1}{2}\,0.2v^2 \qquad v = 2.86\,\mathrm{m/s}$$

$$C\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}\,0.2v^2 \\ E_p = 0.2 \cdot 9.8 \cdot 0.45 \end{cases} \qquad D\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}\,0.2v^2 \\ E_p = 0.2 \cdot 9.8 \cdot 0.30 \end{cases}$$

Conservación de la energía E_B=E_C.

$$\frac{1}{2}\,0.2v_B^2 + 0.2 \cdot 9.8 \cdot 0.30 = \frac{1}{2}\,0.2v^2 + 0.2 \cdot 9.8 \cdot 0.45 \qquad v_C = 2.29\,\mathrm{m/s}$$

Como E_B=E_D y están a la misma altura v_B=v_D



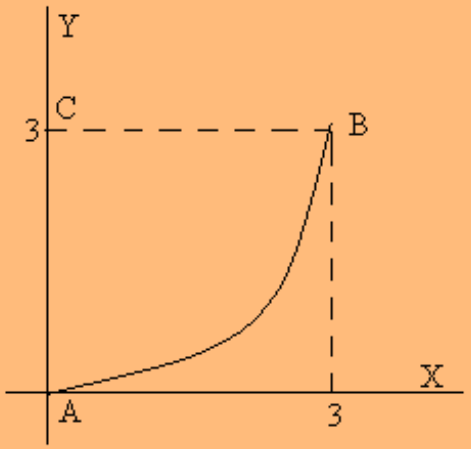
Reacción en C.

Dinámica del movimiento circular uniforme

$$N + mg = m\,\frac{v^2}{R}$$

$$N + 0.2 \cdot 9.8 = 0.2\,\frac{v_C^2}{0.15} \qquad N = 5.03\,\mathrm{N}$$

EJEMPLO



Sobre una partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}=2x^2\mathbf{i}+3y^2\mathbf{j}$ N. Hallar el trabajo realizado por dicha fuerza a lo largo del camino cerrado ABCA de la figura. El camino AB es una porción de la parábola $y=x^2/3$.

SOLUCIÓN

Trabajo infinitesimal

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=(2x^2\,\hat{\mathbf{i}}+3y^2\,\hat{\mathbf{j}})\cdot(dx\,\hat{\mathbf{i}}+dy\,\hat{\mathbf{j}})=2x^2dx+3y^2dy$$

Camino AB

$$y=\frac{x^2}{3}\qquad dy=\frac{2}{3}\,x\cdot dx$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=\left(2x^2+\frac{2}{9}\,x^5\right)dx$$

$$W_{AB}=\int_A^B\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=\int_0^3\left(2x^2+\frac{2}{9}\,x^5\right)dx=45\,\mathrm{J}$$

Camino BC

$$y=3\qquad dy=0$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=2x^2dx$$

$$W_{BC}=\int_B^C\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=\int_3^0 2x^2dx=-18\,\mathrm{J}$$

Camino CA

$$x=0\qquad dx=0$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=3y^2dy$$

$$W_{CA}=\int_C^A\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=\int_3^0 3y^2dy=-27\,\mathrm{J}$$

$$\oint\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=45-18-27=0$$

*Para determinar la **posición de un objeto en un campo conservativo** en función del tiempo primero se escribe la ecuación de la energía del objeto:

$$U(x) - \frac{1}{2}mv^2 = E$$

Entonces, despejando la velocidad se obtiene: $v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$

Donde necesariamente $E \geq U(x)$ pues la velocidad v no puede ser un número imaginario; es decir, $v \notin \mathbf{I}$ ó $K < 0$.

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt$$

$$\therefore \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Energía potencial elástica

$$F_s = -kx$$

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$W_{\text{ap}} = \tfrac{1}{2}kx_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}kx_i^{\,2}$$

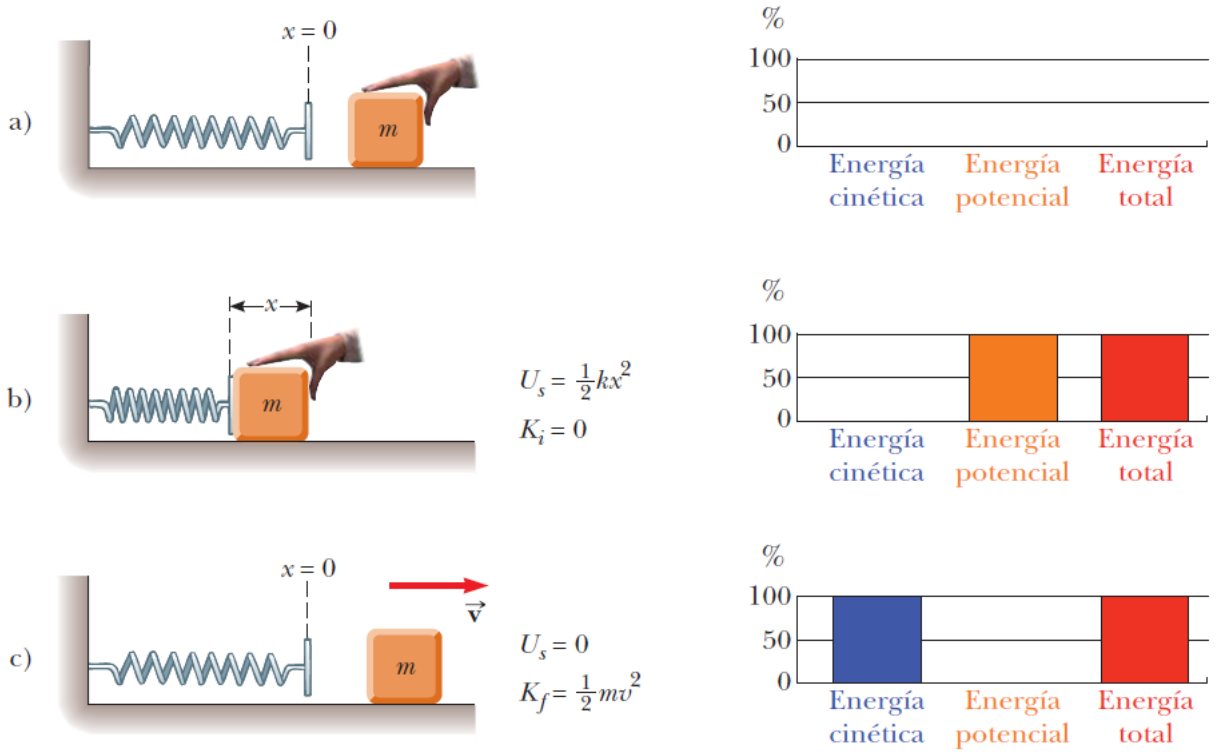
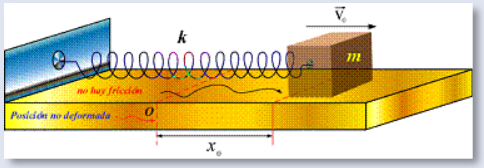


Figura 7.16 a) Un resorte no deformado sobre una superficie horizontal sin fricción. b) Se empuja un bloque de masa m contra el resorte y lo comprime una distancia x. La energía potencial elástica se almacena en el sistema resorte–bloque. c) Cuando el bloque se libera desde el reposo, la energía potencial elástica se transforma en energía cinética del bloque. Las gráficas de barras de energía a la derecha de cada parte de la figura ayudan a seguir la pista de la energía en el sistema.

*Ejemplo
Desplazamiento en un Resorte:



Para una partícula de masa m que se mueve en una dimensión bajo la acción de un resorte de constante de fuerza k, para el cual: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

Suponiendo en el tiempo $t = 0$ que $x = x_0$ y $v = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}kx^2$.

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} = t$$

y como:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -Cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{(x_0^2 - x^2)}} = -Cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\Big]_{x_0}^{x} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

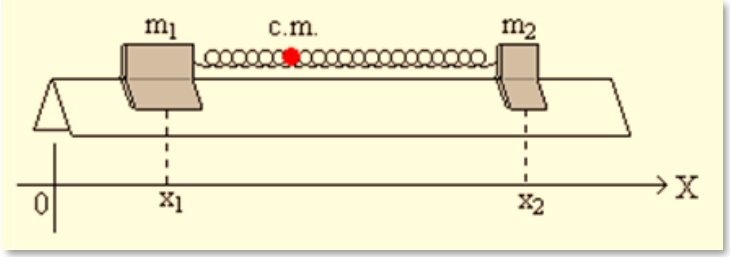
$$\therefore \qquad x(t) = x_0 Cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Lo cual muestra un movimiento oscilatorio como se esperaba.

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Sistemas de dos partículas:

Supóngase un sistema como el mostrado en la figura, en la que se representa un riel de aire con dos masas montadas sobre él, m_1 y m_2 tales que $m_1 = 2m_2$; y unidas por un resorte de constante de restitución k.



Las posiciones de los objetos son x_1 y x_2. Si la extensión del resorte de longitud normal L se representa con la letra d, entonces las posiciones de las masas quedan relacionadas mediante la expresión: $x_2 = x_1 + L + d$.

La ecuación para la energía de este sistema es: $E = U + K = \frac{1}{2} kd^2 + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$.

Para un sistema unidimensional como este se puede definir el centro de masa simplemente como:

$$x_{cm} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

que como lo expresa la fórmula, ubica el punto en donde la distribución de masa del sistema es equitativa en ambas direcciones del eje X.

Si se define la masa total del sistema como $M \equiv m_1 + m_2$ entonces puede escribirse la fórmula del centro de masa como:

$$x_{cm} \equiv \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2)$$

La expresión para la velocidad del centro de masa del sistema se puede obtener fácilmente de la siguiente manera:

$$v_{cm} = \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1 x_1 + m_2 x_2)$$

$$= \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d}{dt} x_1 + m_2 \frac{d}{dt} x_2\right)$$

$$= \frac{1}{M}(m_1 v_1 + m_2 v_2).$$

Y análogamente se tiene para la aceleración de dicho punto:

$$a_{cm} = \frac{1}{M}(m_1 a_1 + m_2 a_2).$$

Ahora bien, sean F_{12} la fuerza ejercida sobre m_1 debida a la masa m_2 y F_{21} la fuerza ejercida sobre m_2 por m_1 entonces se tiene que $F_{12} = m_1 a_1$ y $F_{21} = m_2 a_2$; de modo que la aceleración del centro de masa se puede escribir como:

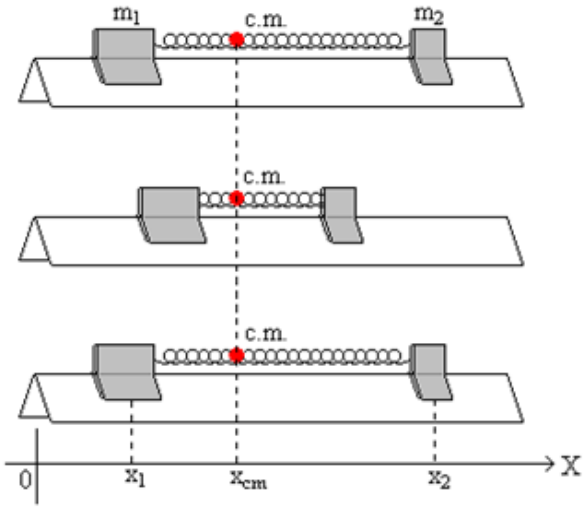
$$a_{cm} = \frac{1}{M}(F_{12} + F_{21})$$

Pero la tercera ley de Newton establece que estas fuerzas son de igual magnitud y sentido opuesto, de modo que $F_{12} = -F_{21}$.

Por tanto:

$$a_{cm} = \frac{1}{M}(F_{12} + F_{21}) = 0.$$

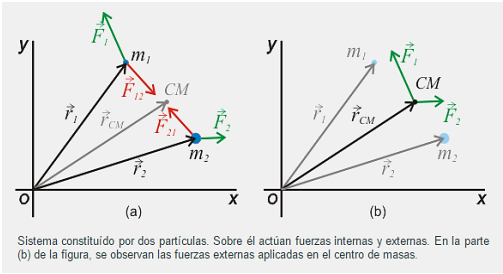
Esto quiere decir que el centro de masa no tiene aceleración debida a las fuerzas internas del sistema, por lo que su velocidad será constante y para un cierto sistema inercial que se desplace con la misma velocidad, el centro de masa permanecerá inmóvil, sin importar que las masas del sistema estén interactuando entre si y estén cambiando sus posiciones relativas con respecto a dicho punto.



Así, en el sistema tomado como ejemplo se tendrá un comportamiento como el mostrado en la figura. Las masas oscilaran en torno al centro de masa, desplazándose a causa de su interacción a través del resorte, pero en todo momento el centro de masa del sistema conservará su posición inalterada.

Nota: el riel de aire, como los que se tienen en los laboratorios, es hueco y tiene una superficie en la que se han practicado numerosos orificios, por los que se hace salir aire proveniente de una compresora (que no se ha presentado en las figuras) y tiene la finalidad de eliminar la fricción entre este y los objetos colocados en él.

Ahora bien, habiendo fuerzas externas actuando sobre m_1 y m_2, digamos F_{E1} y F_{E2} respectivamente, se tiene que:



Sistema constituído por dos partículas. Sobre él actúan fuerzas internas y externas. En la parte (b) de la figura, se observan las fuerzas externas aplicadas en el centro de masas.

$$m_1a_1 = F_{E1} + F_{12} \qquad y \qquad m_2a_2 = F_{E2} + F_{21}$$

$$m_1a_1 + m_2a_2 = F_{E1} + F_{12} + F_{E2} + F_{21}$$

$$\sum F_{EXT} = Ma_{cm}$$

Este resultado expresa que si hay aceleración del centro de masa, esta se debe a fuerzas externas aplicadas sobre los componentes del sistema; y aún más, que las fuerzas externas pueden ser consideradas como actuantes sobre una masa igual a la masa total del sistema y aplicadas sobre el centro de masa del mismo.

Lo anterior valida los diagramas de fuerzas utilizados continuamente en mecánica, en donde las fuerzas aplicadas sobre los objetos se suelen representar aplicadas sobre o desde el centro de masa de los objetos considerados, sin importar su constitución o conformación.

SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

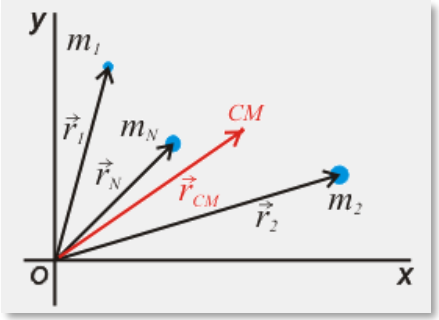
Considérese un sistema tridimensional de muchas n partículas de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

La masa total se puede expresar como: $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, y la posición de cada masa como: $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Entonces, generalizando los resultados anteriores, se puede escribir para el centro de masa: $\mathbf{r}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$.

Donde $$x_{cm} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,, \qquad y_{cm} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,, \qquad z_{cm} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

$\therefore$ $$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$



Así que la velocidad del centro de masa es:

$$\mathbf{v}_{cm} \equiv \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

y análogamente la aceleración del centro de masa se puede escribir como:

$$\mathbf{a}_{cm} \equiv \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i$$

Así se tiene que: $$M\mathbf{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i$$

la aceleración del centro de masas de un sistema de partículas es debida únicamente a las **fuerzas externas** que actúan sobre el sistema.

$$M\,\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}$$

SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

O sea que: $$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

Donde la fuerza $\mathbf{F}_i$ para cada una de las masas m_i se puede descomponer en una fuerza externa más la suma de sus interacciones con el resto de las masas (las fuerzas internas); es decir:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i\,EXT} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} m_i \mathbf{F}_{ij}$$

Por la tercera ley de Newton $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \Rightarrow \sum \mathbf{F}_{EXT} = M\mathbf{a}_{cm}$; donde $\sum \mathbf{F}_{EXT} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{iEXT}$

O bien, $$\sum \mathbf{F}_{EXT,\,x} = M\mathbf{a}_{cm,\,x}; \quad \sum \mathbf{F}_{EXT,\,y} = M\mathbf{a}_{cm,\,y}; \quad \sum \mathbf{F}_{EXT,\,z} = M\mathbf{a}_{cm,\,z}$$

∴ Si la fuerza externa sobre un sistema de partículas es cero, el sistema se mueve con velocidad constante.

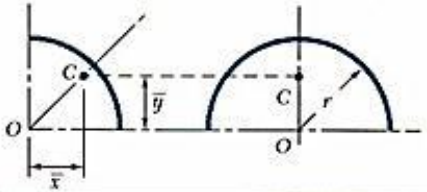
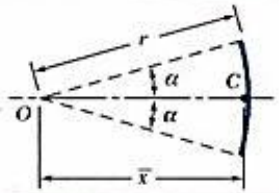
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Figura 5.8B Centroides de formas comunes de líneas.

Centro de masa objetos sólidos

Se puede dividir a un objeto sólido en pequeños elementos de masa δm_i. Cuando se vuelven infinitamente pequeños las ecuaciones para el centro de masa se transforman en integrales:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \delta m_i = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \delta m_i = \frac{1}{M} \int y dm$$

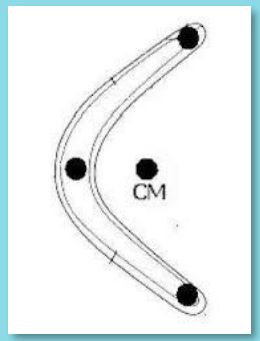
$$z_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} z_i \delta m_i = \frac{1}{M} \int z dm$$

y que en forma vectorial toman la forma: $\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm$

Los objetos irregulares pueden ser divididos en varias partes. Así, se puede hallar el centro de masa de cada parte y luego el de la combinación.

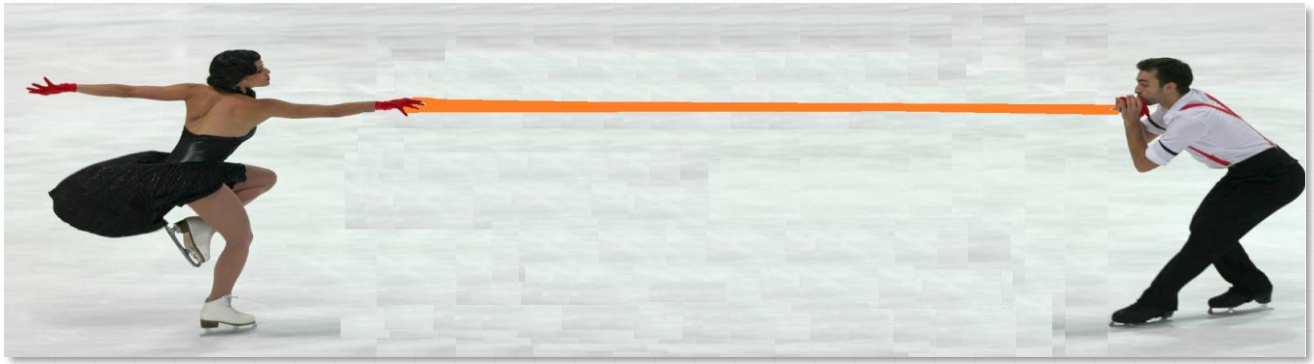
Ejemplo:

El centro de masa debe estar en la línea que marca la intersección de la las divisiones.



EJEMPLO

Dos patinadores, uno con 65 Kg de masa y el otro con 42 Kg de masa, están de pie en una pista de hielo sosteniendo una pértiga de 9.7 m de longitud y de masa despreciable. Comenzando desde los extremos de la pértiga los patinadores se jalan a sí mismos a lo largo de la pértiga hasta que se encuentran. Calcular la distancia que recorrerá el patinador de 42 Kg:



SOLUCIÓN

Los patinadores se encontrarán en el centro de masa, que puede ser calculado fácilmente suponiendo que la posición del primero es $x_1 = 0$ y la del segundo es $x_2 = 9.7\ m$. Entonces:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(42\ kg) \cdot (97\ m)}{(65\ kg) + (42\ kg)} = 3.8\ m$$

De modo que el patinador de 42 Kg recorrerá la distancia:

$$x_2 - x_{cm} = (9.7 - 3.8)\ m = 5.9\ m$$

EJEMPLO

Un Chrysler con una masa de $2210\,Kg$ se está moviendo a lo largo de un tramo recto de carretera a $105\,Km/h$. Es seguido por un Ford de $2080\,Kg$ de masa que se mueve a $43.5\,Km/h$. Calcular la velocidad que tiene el centro de masa de los dos carros en movimiento:

SOLUCIÓN

Para calcular la velocidad del centro de masa solo es necesario sustituir los datos del problema en la fórmula:

$$V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

De modo que:

$$V_{cm} = \frac{(2210\,kg)\cdot(105\,km/h) + (2880\,kg)\cdot(43.5\,km/h)}{(2210\,kg) + (2880\,kg)} \approx 75.2\,Km/h$$

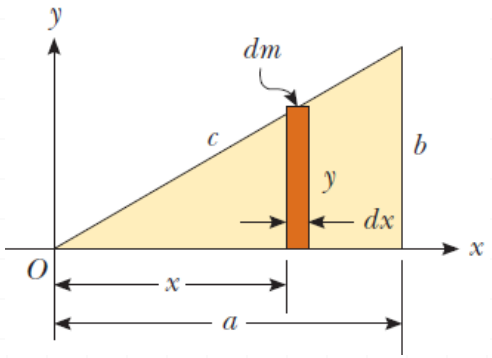
EJEMPLO 9.12 Centro de masa de un triángulo rectángulo

Se le pide colgar una señal metálica de un alambre vertical. La señal tiene la forma triangular que se muestra en la figura 9.20a. La parte baja de la señal es paralela al suelo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo de la señal se debe unir el alambre de soporte?

SOLUCIÓN

Analizar Se supone que la señal triangular tiene una densidad uniforme y masa total M. Ya que la señal es una distribución de masa continua, se debe usar la expresión integral para hallar la coordenada x del centro de masa.

La masa de cada fleje es el producto del volumen del fleje y la densidad ρ del material del que está hecho la señal: $dm = \rho yt\,dx$, donde t es el grosor de la señal metálica. La densidad del material es la masa total de la señal dividida entre su volumen total (área del triángulo por grosor).



$$dm = \rho yt\,dx = \left(\frac{M}{\frac{1}{2}abt}\right) yt\,dx = \frac{2My}{ab}\,dx$$

$$1)\quad x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\frac{2My}{ab}\,dx = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\,dx$$

Para proceder aún más y evaluar la integral, debe expresar y en términos de x. La línea que representa la hipotenusa del triángulo en la figura tiene una pendiente de b/a y pasa a través del origen, de modo que la ecuación de esta línea es $y = (b/a)x$.

Sustituya para y en la ecuación 1):

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

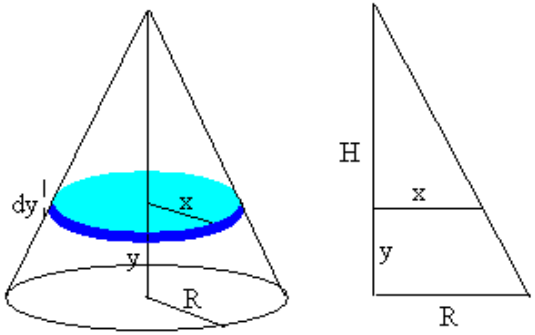
$$= \tfrac{2}{3}a$$

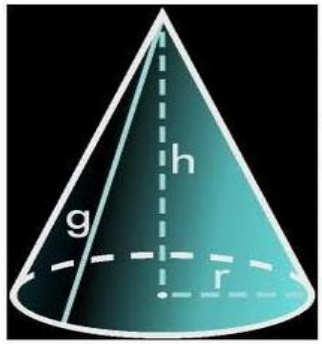
Por lo tanto, el alambre se debe unir a la señal a una distancia dos tercios la longitud del borde inferior desde el extremo izquierdo.

EJEMPLO

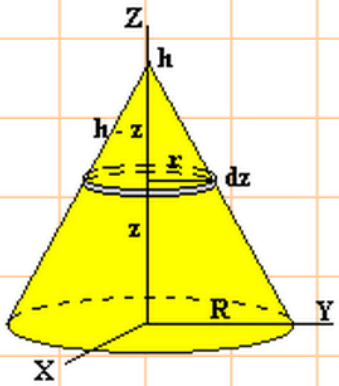
CENTRO DE MASA DE UN CONO MACIZO

SOLUCIÓN





$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$



Por ser un objeto simétrico respecto al eje Z, las coordenadas x , y, del centro de masas serán nulas:

$x_{cdm} = 0$ $y_{cdm} = 0$

Por semejanza de triángulos:

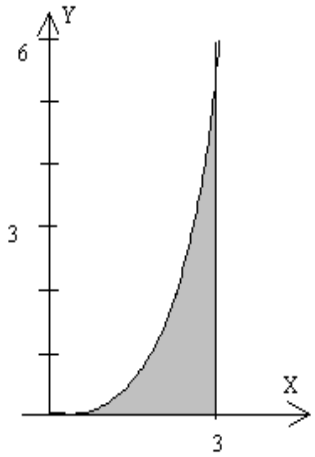
$$\frac{r}{R} = \frac{h-z}{h} \rightarrow r = \frac{R}{h}.(h-z)$$

$$dm = \pi.r^2.dz = \pi.\frac{R^2}{h^2}.(h-z)^2.dz$$

$$z_{cdm} = \frac{\int z.dm}{m} = \frac{\int_0^h z.\pi.\frac{R^2}{h^2}.(h-z)^2.dz}{\frac{1}{3}.\pi.R^2.h}$$

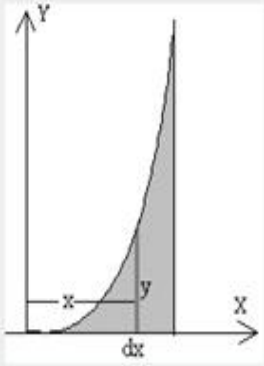
$$z_{cdm} = -\frac{3}{h^3}.\int_0^h (h^2.z - 2.h.z^2 + z^3).dz = \frac{h}{4}$$

EJEMPLO



Determinar la posición del centro de masa de la siguiente figura plana y homogénea, formada por la región comprendida entre la parábola $y=2x^2/3$ y el eje X, y la recta $x=3$.

SOLUCIÓN

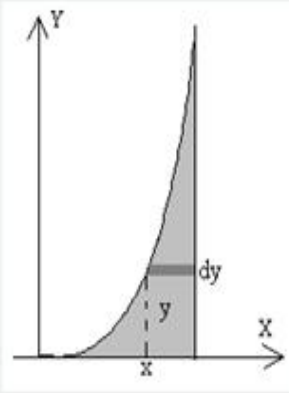


Elemento diferencial de área, $dA=y\cdot dx$

$$\int x\cdot dA=\int x(y\cdot dx)=\int_0^3 x\,\frac{2}{3}x^2\cdot dx=\frac{27}{2}$$

$$\int dA=\int y\cdot dx=\int_0^3 \frac{2}{3}x^2\cdot dx=6$$

$$x_{cm}=\frac{\int x\cdot dA}{\int dA}=\frac{9}{4}$$



Elemento diferencial de área, $dA=(3-x)\cdot dy$

$$\int y\cdot dA=\int y(3-x)\cdot dy=\int_0^3 \frac{2}{3}x^2(3-x)\,\frac{4}{3}x\cdot dx=\frac{54}{5}$$

$$\int dA=\int (3-x)\cdot dy=\int_0^3 (3-x)\,\frac{4}{3}x\cdot dx=6$$

$$y_{cm}=\frac{\int y\cdot dA}{\int dA}=\frac{9}{5}$$

Resumen

Con mucha frecuencia, un **sistema** es una sola partícula, un conjunto de partículas o una región del espacio, y puede variar en tamaño y forma. La **frontera del sistema** separa al sistema del **medio ambiente.**

El **trabajo** W invertido en un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ en el sistema es el producto de la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y la componente $F\cos\theta$ de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$:

$$W \equiv F\,\Delta r\cos\theta \qquad (7.1)$$

Si una fuerza variable realiza trabajo en una partícula conforme la partícula se traslada a lo largo del eje x desde x_i hasta x_f, el trabajo consumido por la fuerza en la partícula se proporciona por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \qquad (7.7)$$

donde F_x es la componente de fuerza en la dirección x.

El **producto escalar** (producto punto) de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se define mediante la correspondencia

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta \qquad (7.2)$$

donde el resultado es una cantidad escalar y θ es el ángulo entre los dos vectores. El producto escalar obedece a las leyes conmutativa y distributiva.

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con una rapidez v es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (7.16)$$

Si una partícula de masa m está a una distancia y sobre la superficie de la Tierra, la **energía potencial gravitacional** del sistema partícula-Tierra es

$$U_g \equiv mgy \qquad (7.19)$$

La **energía potencial elástica** almacenada en un resorte con constante de fuerza k es

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (7.22)$$

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo que realiza en una partícula que es integrante del sistema, conforme la partícula se mueve entre dos puntos, es independiente de la trayectoria que sigue la partícula entre los dos puntos. Además, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve a través de una trayectoria cerrada arbitraria y regresa a su posición inicial. Una fuerza que no satisface estos criterios se dice que es **no conservativa**.

La **energía mecánica total de un sistema** se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \qquad (7.24)$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El **teorema trabajo–energía cinética** establece que, si una fuerza externa invierte trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es en su rapidez,

$$W_{\text{neto}} = K_f - K_i = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (7.15, 7.17)$$

Una **función de energía potencial** U se asocia sólo con una fuerza conservativa. Si una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ actúa entre integrantes de un sistema mientras un integrante se mueve a lo largo del eje x de x_i a x_f, el cambio en la energía potencial del sistema es igual al negativo del trabajo invertido por dicha fuerza:

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx \qquad (7.26)$$

Los sistemas están en tres clases de configuraciones de equilibrio cuando la fuerza neta en un integrante del sistema es cero. Las configuraciones de **equilibrio estable** corresponden cuando $U(x)$ es un mínimo. Las configuraciones de **equilibrio inestable** corresponden cuando $U(x)$ es un máximo. El **equilibrio neutro** surge cuando U es constante mientras un integrante del sistema se mueve en alguna región.

Lecturas Recomendadas:

FIN

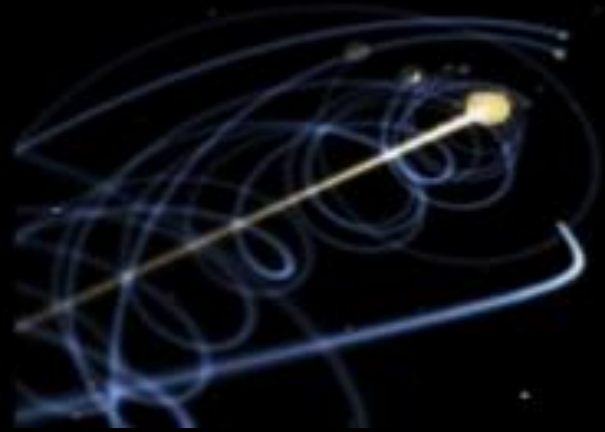
Periodo 3

MECÁNICA VECTORIAL

CINÉTICA DE PARTÍCULAS

IMPULSO Y MOMENTO

Física + Matemáticas en Acción



Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

Contenido

DECLARATIVO

IV. CINÉTICA DE PARTÍCULAS. MÉTODO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Impulso y cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas.

Conservación de la cantidad de movimiento.

Impactos elásticos e inelásticos: caso central directo.

Diagramas de cuerpo libre.

V. CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO.

Movimiento plano general.

Movimiento relativo con velocidades y aceleraciones.

Centro instantáneo de velocidad cero.

VI. CINÉTICA PLANA DE CUERPOS RÍGIDOS: MÉTODO DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON.

Introducción.

Momento de inercia de masa.

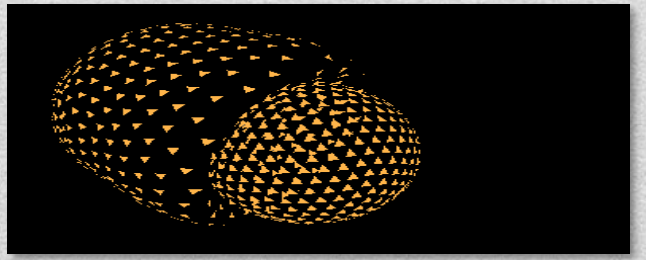
Cuerpos compuestos.

Ecuaciones de movimiento de traslación, rotación y movimiento general plano.

Método de fuerza masa y aceleración

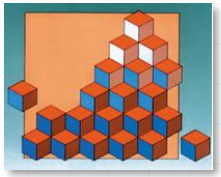
Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular



- Cantidad de movimiento lineal y su conservación
- Impulso y cantidad de movimiento
- Colisiones en una dimensión
- Colisiones en dos dimensiones
- El centro de masa
- Movimiento de un sistema de partículas
- Sistemas deformables
- Propulsión de cohetes

Objetivos de la Lección



Al terminar esta lección el alumno será capaz de:

- *Explicar el concepto de cantidad de movimiento lineal.*
- *Distinguir el Impulso y la cantidad de movimiento.*
- *Reconocer los choques perfectamente elásticos entre partículas.*
- *Resolver problemas donde intervengan colisiones.*
- *Aplicar los conceptos estudiados en problemas relacionados con la propulsión de cohetes.*

Cantidad de movimiento

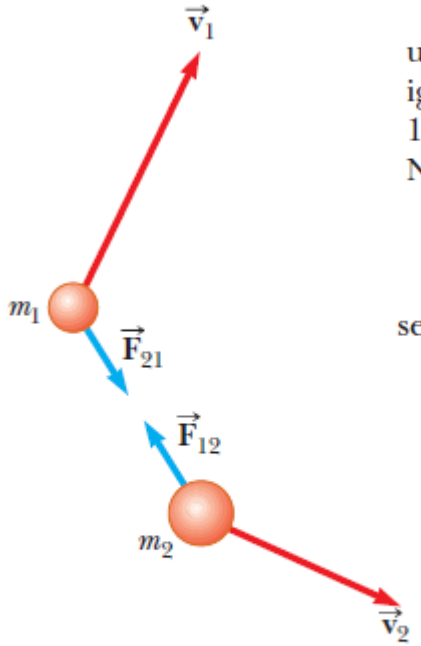


Figura 9.1 Dos partículas interactúan mutuamente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se debe tener $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Si una fuerza a causa de la partícula 1 (por ejemplo, una fuerza gravitacional) actúa sobre la partícula 2, debe haber una segunda fuerza, igual en magnitud pero opuesta en dirección, que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1. Es decir, las fuerzas en las partículas forman un par acción–reacción de la tercera ley de Newton, y $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Esta condición se expresa como

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

Por lo tanto, al sustituir la fuerza sobre cada partícula con $m\vec{a}$ para la partícula se obtiene

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

Ahora se sustituye cada aceleración con su definición de la ecuación 4.5:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

Si las masas m_1 y m_2 son constantes, se les puede colocar adentro de la operación de derivada, que produce

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0$$

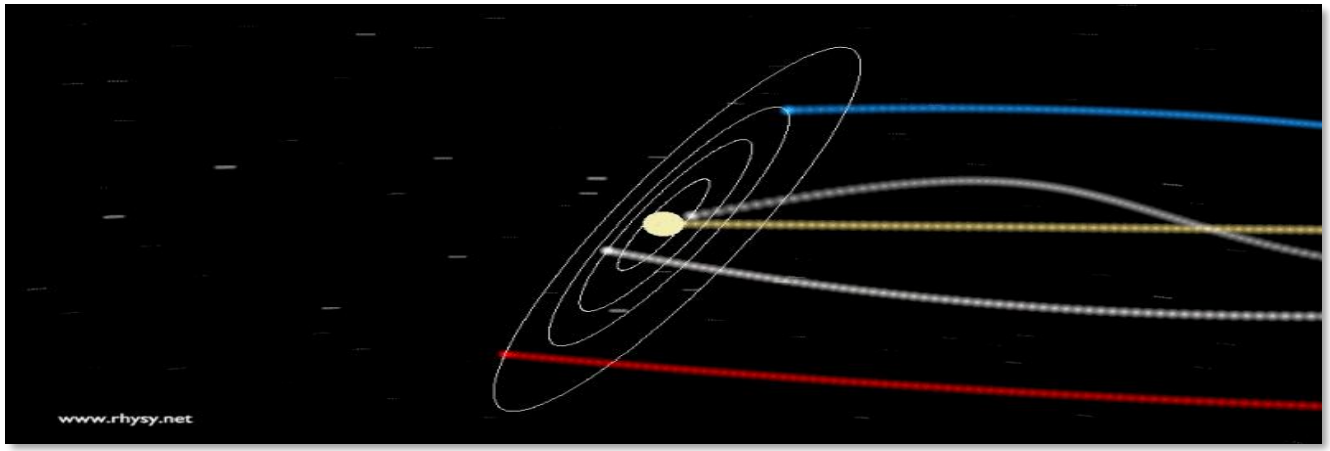
Definición de cantidad de movimiento lineal de una partícula ►

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \qquad (9.2)$$

La cantidad de movimiento lineal es una cantidad vectorial porque es igual al producto de una cantidad escalar m y una cantidad vectorial $\vec{v}$. Su dirección es a lo largo de $\vec{v}$, tiene dimensiones ML/T y su unidad del SI es kg · m/s.

Cantidad de movimiento



Si una partícula es móvil en una dirección arbitraria, $\vec{\mathbf{p}}$ tiene tres componentes y la ecuación 9.2 es equivalente a las ecuaciones por componentes

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

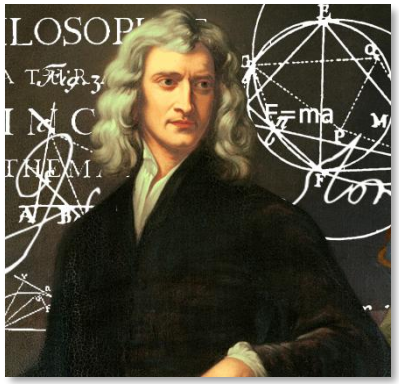
Al usar la segunda ley de movimiento de Newton, se puede relacionar la cantidad de movimiento lineal de una partícula con la fuerza resultante que actúa en la partícula. Se inicia con la segunda ley de Newton y sustituye la definición de aceleración:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

En la segunda ley de Newton, la masa m se supone constante. Debido a eso, se puede llevar m dentro de la operación derivada para producir

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \qquad (9.3)$$

Esta ecuación muestra que **la relación de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula.**



◀ Segunda ley de Newton para una partícula

Cantidad de movimiento

Conservación de la cantidad de movimiento ▶

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

Al usar la definición de cantidad de movimiento, la ecuación 9.1 se puede reescribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = 0$$

Ya que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_{tot} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$ es *cero*, se concluye que la cantidad de movimiento *total* del sistema aislado de las dos partículas en la figura 9.1 debe permanecer constante:

$$\vec{\mathbf{p}}_{tot} = \text{constante}$$

o, de manera equivalente,

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f}$$

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \qquad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \qquad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}$$

EJEMPLO 9.1 El arquero

Considere la situación propuesta al principio de esta sección. Un arquero de 60 kg está de pie en reposo sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s (figura 9.2). ¿Con qué velocidad el arquero se mueve sobre el hielo después de disparar la flecha?

Figura 9.2

SOLUCIÓN

Se elige la dirección de disparo de la flecha como la dirección x positiva. Al identificar al arquero como la partícula 1 y la flecha como la partícula 2, se tiene $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 0.50$ kg y $\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 50\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

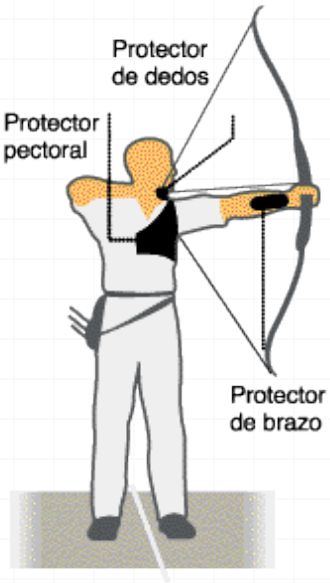
Ajustar la cantidad de movimiento final del sistema igual a cero:

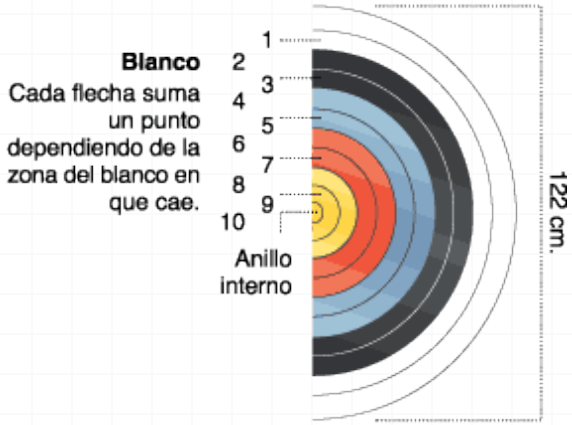
$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 0$$

Resuelva esta ecuación para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y sustituya valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{\mathbf{v}}_{2f} = -\left(\frac{0.50\text{ kg}}{60\text{ kg}}\right)(50\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = \boxed{-0.42\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}}$$

Finalizar El signo negativo para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ indica que el arquero, después de disparar la flecha, se mueve hacia la izquierda en la figura 9.2, en la dirección opuesta a la dirección de movimiento de la flecha, en concordancia con la tercera ley de Newton.





Si la flecha toca una línea, se le da la puntuación más alta. Si una flecha cae encima de otra, recibe la misma puntuación que la primera.

AP

¿Qué pasaría si? ¿Y si la flecha se dispara en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal? ¿Cómo cambiará la velocidad de retroceso del arquero?

Respuesta La velocidad de retroceso disminuirá en magnitud porque sólo una componente de la velocidad de la flecha está en la dirección x. La conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x produce

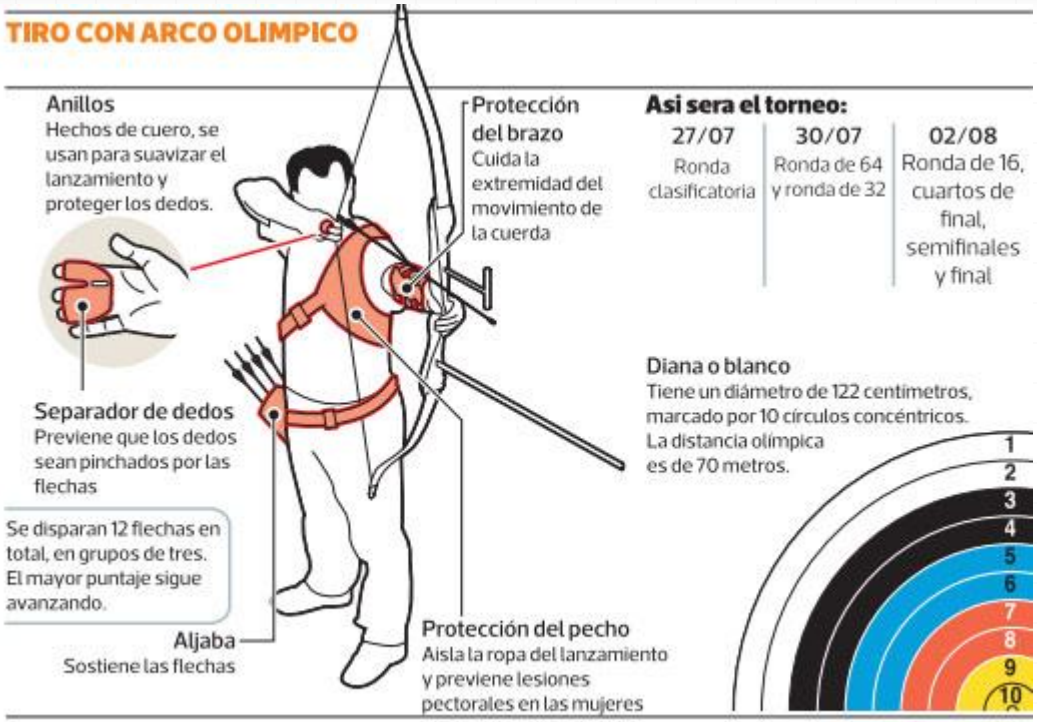
$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \cos\theta = 0$$

lo que conduce a

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} \cos\theta$$

Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, y la velocidad final del arquero se reduce al valor cuando la flecha se dispara horizontalmente. Para valores de θ distintos de cero, la función coseno es menor que 1 y la velocidad de retirada es menor que el valor calculado para $\theta = 0$. Si $\theta = 90°$, en tal caso $\cos\theta = 0$ y $v_{1f} = 0$, de modo que no hay velocidad de retirada.

TIRO CON ARCO OLIMPICO



Asi sera el torneo:

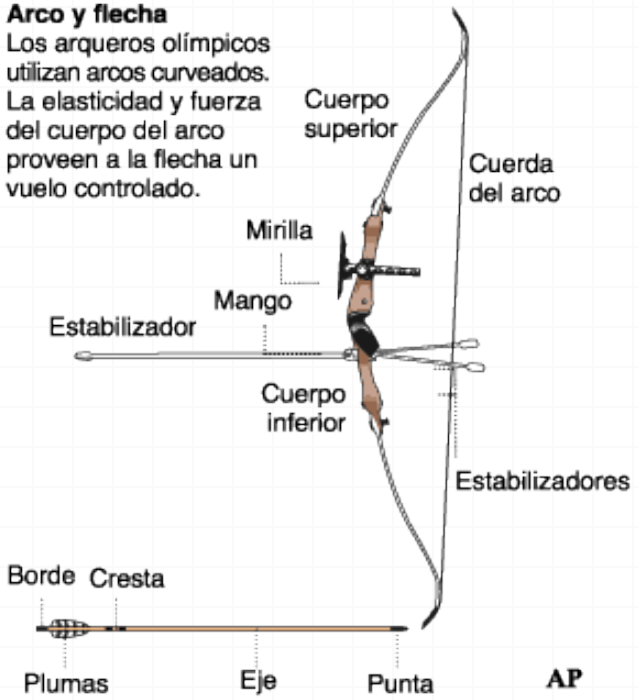
27/07	30/07	02/08
Ronda clasificatoria	Ronda de 64 y ronda de 32	Ronda de 16, cuartos de final, semifinales y final

Diana o blanco
Tiene un diámetro de 122 centímetros, marcado por 10 círculos concéntricos. La distancia olímpica es de 70 metros.

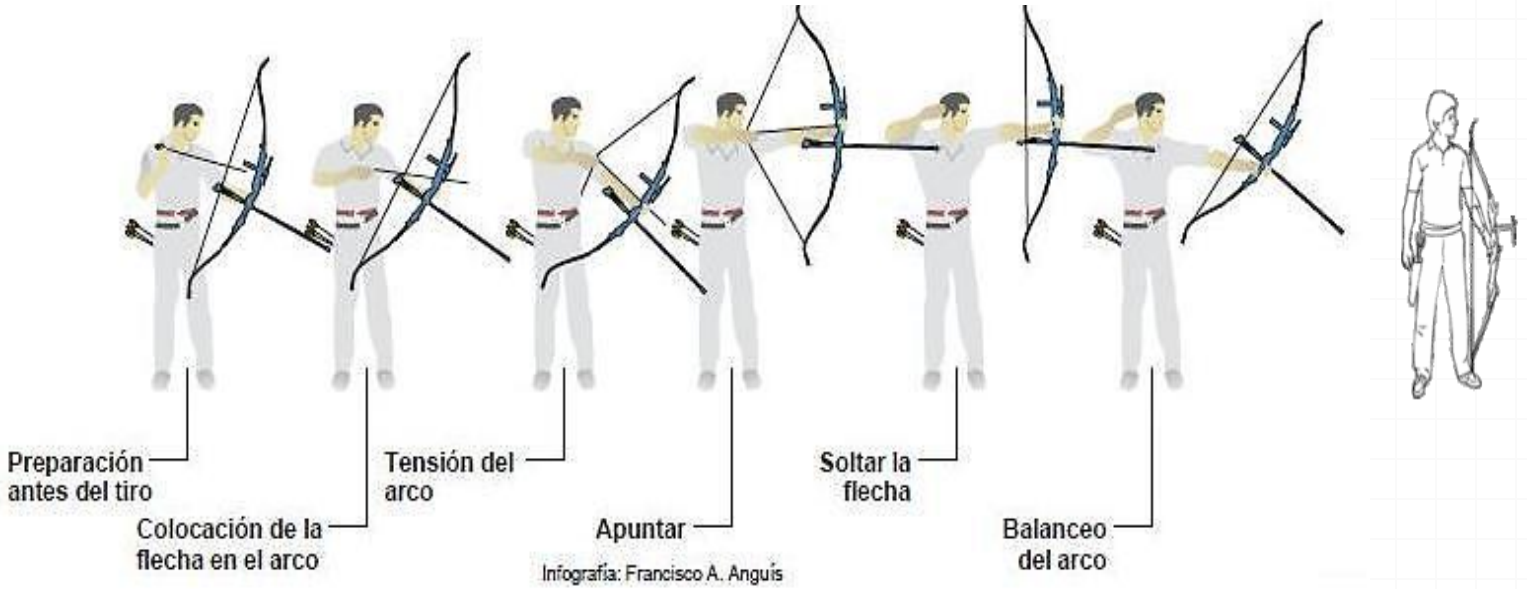
FUENTE: Reuters

LA TERCERA

Arco y flecha
Los arqueros olímpicos utilizan arcos curveados. La elasticidad y fuerza del cuerpo del arco proveen a la flecha un vuelo controlado.



AP



Infografía: Francisco A. Anguis

1

Impulso y cantidad de movimiento

Las bolsas de aire en los automóviles han salvado incontables vidas en los accidentes. La bolsa de aire aumenta el intervalo de tiempo durante el cual el pasajero es llevado al reposo, con lo cual disminuye la fuerza (y las lesiones resultantes) en el pasajero.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$,

$$d\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

Impulso de una fuerza ▶

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

Teorema impulso–cantidad de movimiento ▶

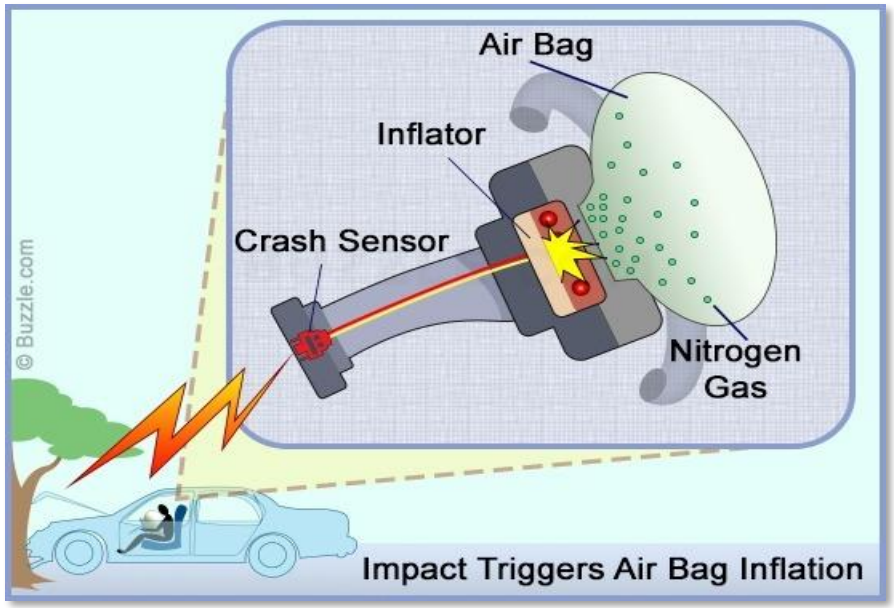
El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa en la partícula:

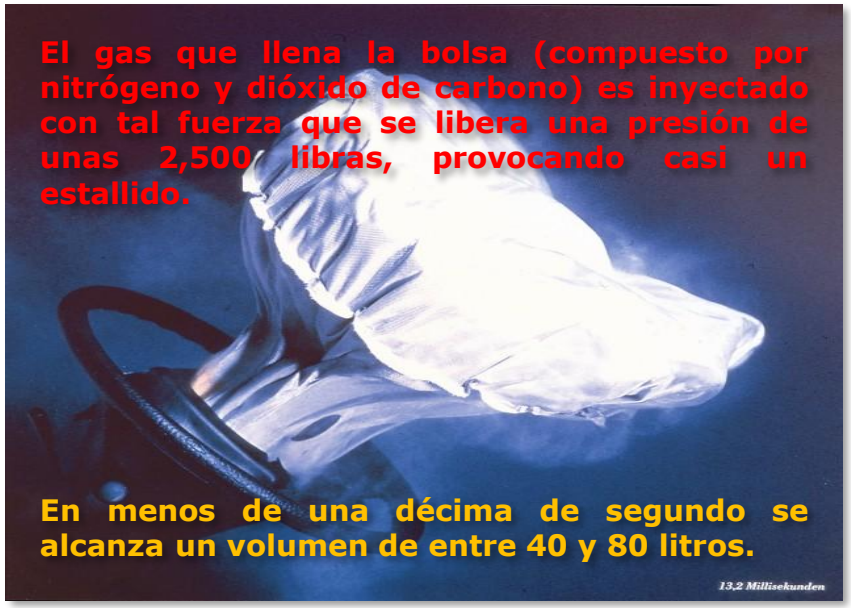
$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}} \qquad (9.10)$$

BOLSAS DE AIRE

- Es efectivo en colisiones frontales.
- Se activa a partir de 30 Km/h.
- El tiempo de inflado es de sólo 0.03 s.
- Se desinfla en forma instantánea.
- Otorga suficiente área de contacto, pero sin obstaculizar completamente al conductor.
- El mecanismo es operado por fuerza de inercia, evitando cualquier falla eléctrica.
- Sólo puede ser instalado por el fabricante.
- Al proteger el cuerpo del golpe contra el tablero o la columna de dirección, el *air bag* evita las lesiones a: cara, cuello, cerebro, hígado, riñones, bazo.

El mecanismo consiste en un sensor de impacto ubicado en el frente de la carrocería. Al activarse el sensor y producirse a la vez una desaceleración longitudinal y continua del vehículo, el sistema infla una bolsa de doble lámina de poliuretano reforzado, instalada en un módulo especial al interior del volante.





Impulso y cantidad de movimiento

fuerza impulsiva

Ya que la fuerza neta que imparte un impulso a una partícula por lo general puede variar en el tiempo, es conveniente definir una fuerza neta promediada en el tiempo:

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. (Esta ecuación es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo.) Debido a eso, la ecuación 9.9 se puede expresar como

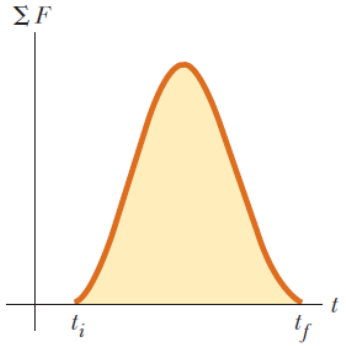
$$\vec{\mathbf{I}} = \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \Delta t$$

Esta fuerza promediada en el tiempo, que se muestra en la figura 9.3b, se interpreta como la fuerza constante que daría a la partícula, en el intervalo de tiempo Δt, el mismo impulso que la fuerza variable en el tiempo da durante este mismo intervalo.

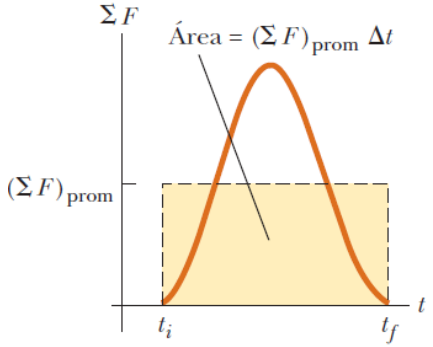
En principio, si $\sum \vec{\mathbf{F}}$ se conoce como una función del tiempo, el impulso se calcula a partir de la ecuación 9.9. El cálculo se vuelve especialmente simple si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante. En este caso $\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$, donde $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza neta constante, y la ecuación 9.12 se convierte en

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, \Delta t$$

En muchas situaciones físicas se usará lo que se llama la **aproximación del impulso, en la que se supone que una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente**.



a)



b)

EJEMPLO 9.3 ¿Qué tan útiles son las defensas?

En una prueba de choque, un automóvil de 1 500 kg de masa choca con una pared, como se muestra en la figura 9.4. Las velocidades inicial y final del automóvil son $\vec{\mathbf{v}}_i = -15.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\vec{\mathbf{v}}_f = 2.60\hat{\mathbf{i}}$ m/s, respectivamente. Si la colisión dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza promedio ejercida en el automóvil.

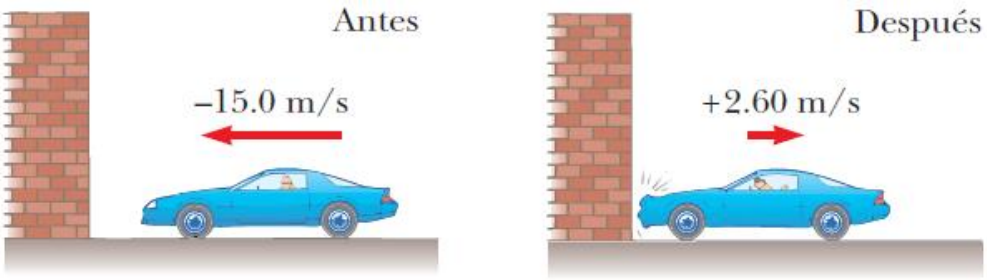


Figura 9.4

SOLUCIÓN

$$\vec{\mathbf{p}}_i = m\vec{\mathbf{v}}_i = (1\,500\text{ kg})(-15.0\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = -2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_f = m\vec{\mathbf{v}}_f = (1\,500\text{ kg})(2.60\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = 0.39 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

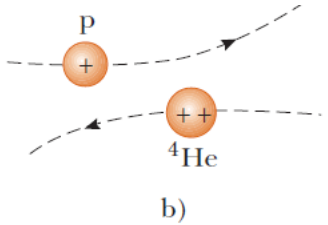
$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0.39 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s})$$

$$= 2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Colisiones en una dimensión

Cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 chocan como se muestra en la figura 9.5, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, tales como las que se muestran en la figura 9.3. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza impulsiva, esta fuerza es interna al sistema de dos partículas. En consecuencia, las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

En contraste, la energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión. De hecho, las colisiones se categorizan como *elásticas* o como *inelásticas*, dependiendo de si la energía cinética se conserva o no.

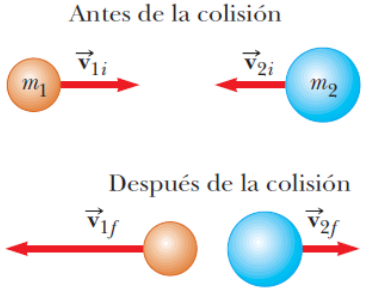


b)

Figura 9.5 a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. b) "Colisión" entre dos partículas con carga.

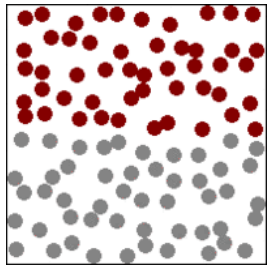
Colisiones elásticas

Una **colisión elástica** entre dos objetos es aquella en la que **la energía cinética total (así como la cantidad de movimiento total) del sistema es la misma antes y después de la colisión**. Las colisiones entre ciertos objetos en el mundo macroscópico, como las bolas de billar, sólo son *aproximadamente* elásticas porque tiene lugar alguna deformación y pérdida de energía cinética. Por ejemplo, usted puede escuchar la colisión de una bola de billar, de modo que usted sabe que parte de la energía se transfiere del sistema mediante sonido. ¡Una colisión elástica debe ser perfectamente silenciosa! Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas.



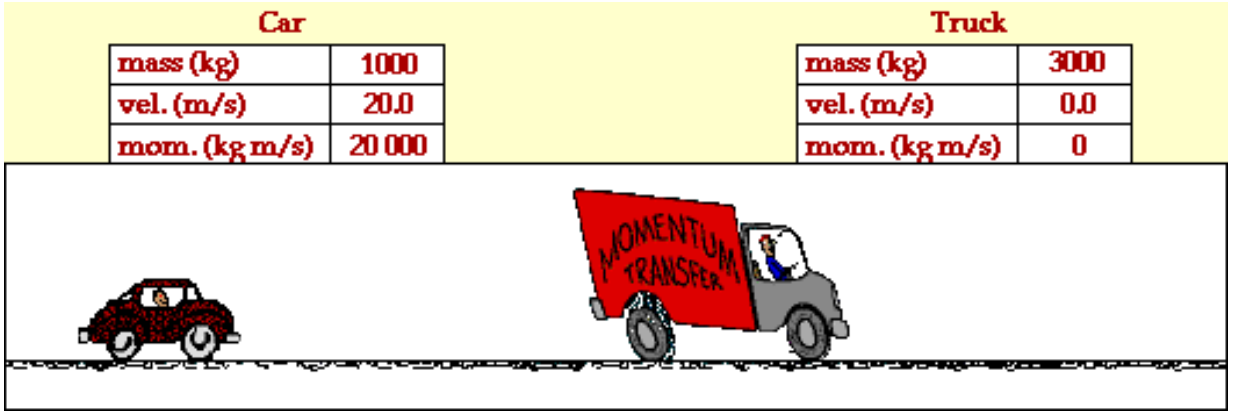
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

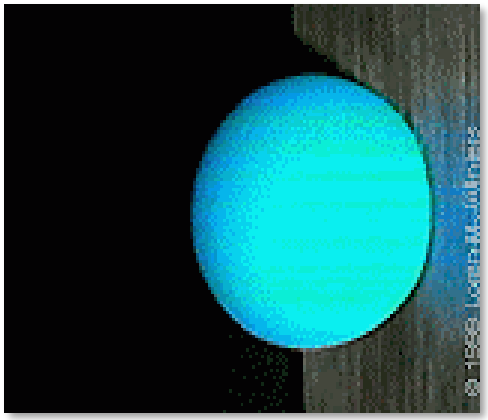
$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$$



Colisiones en una dimensión

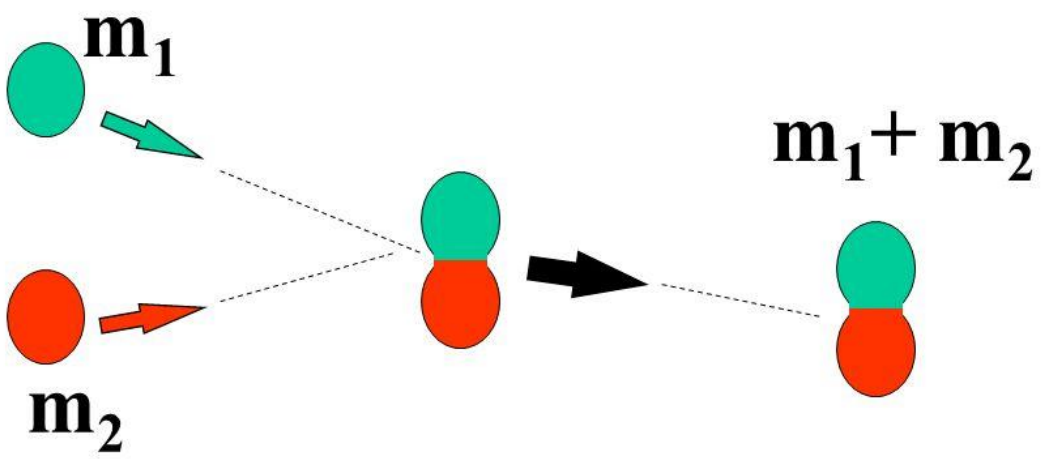
En una **colisión inelástica la energía cinética total del sistema no es la misma antes ni después de la colisión (aun cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve)**. Las colisiones inelásticas son de dos tipos. Cuando los objetos se unen después de chocar, como cuando un meteorito choca con la Tierra, la colisión se llama **perfectamente inelástica**. Cuando los objetos en colisión no se unen sino que se pierde parte de la energía cinética, como en el caso de una bola de hule que choca con una superficie dura, la colisión se llama **inelástica** (sin adverbio modificador). Cuando la bola de hule choca con la superficie dura, parte de la energía cinética de la bola se pierde cuando la bola se deforma mientras está en contacto con la superficie.

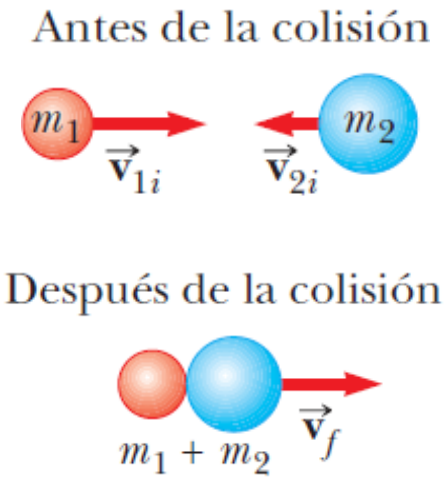




Colisiones en una dimensión

Colisiones perfectamente inelásticas





$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f$$

Al resolver para la velocidad final se obtiene

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

EJEMPLO 9.5 ¡Lleve seguro contra choques!

A un automóvil de 1 800 kg detenido en un semáforo lo golpea por la parte trasera un automóvil de 900 kg. Los dos autos quedan unidos y se mueven a lo largo de la misma trayectoria que la del automóvil en movimiento. Si el auto más pequeño se movía a 20.0 m/s antes de la colisión, ¿cuál es la velocidad de los automóviles unidos después de la colisión?

SOLUCIÓN

Analizar La magnitud de la cantidad de movimiento total del sistema antes de la colisión es igual a la del automóvil más pequeño porque el auto más grande inicialmente está en reposo.

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema: $$p_i = m_1 v_i = (900\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s}) = 1.80 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Evalúe la cantidad de movimiento final del sistema: $$p_f = (m_1 + m_2) v_f = (2\ 700\ \text{kg}) v_f$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final y resuelva para v_f: $$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{1.80 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{2\ 700\ \text{kg}} = 6.67\ \text{m/s}$$

¿Qué pasaría si? Suponga que se invierten las masas de los automóviles. ¿Y si un automóvil de 1 800 kg en movimiento golpea a un automóvil fijo de 900 kg? ¿La rapidez final es la misma que antes?

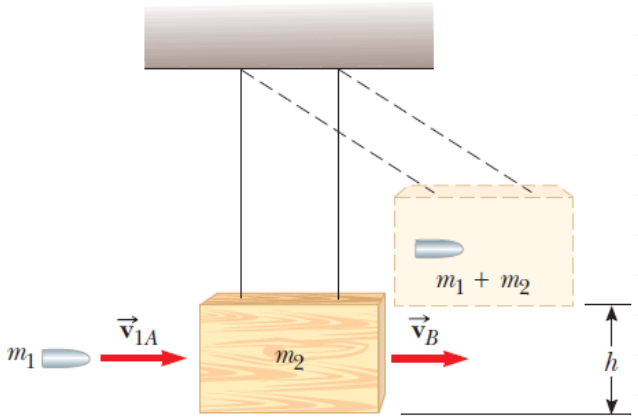
Respuesta Por intuición, se supone que la rapidez final de la combinación es mayor que 6.67 m/s si el automóvil en movimiento es el auto más grande. En términos matemáticos, ese debe ser el caso, ya que el sistema tiene una cantidad de movimiento más grande si el automóvil en movimiento es el más grande. Al resolver para la velocidad final nueva, se encuentra

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{(1\ 800\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s})}{2\ 700\ \text{kg}} = 13.3\ \text{m/s}$$

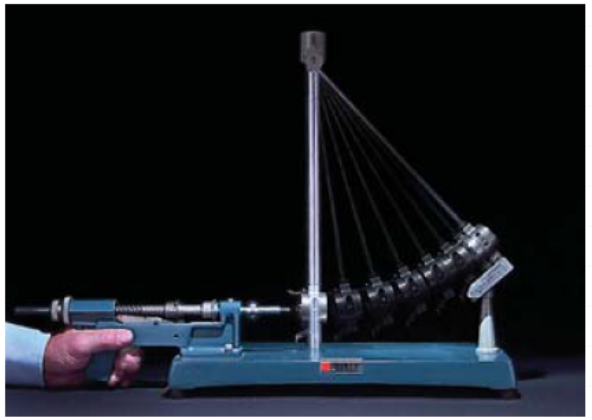
que es dos veces más grande que la velocidad final previa.

EJEMPLO 9.6 El péndulo balístico

El péndulo balístico (figura 9.9) es un aparato que se usa para medir la rapidez de un proyectil que se mueve rápidamente, como una bala. Un proyectil de masa m_1 se dispara hacia un gran bloque de madera de masa m_2 suspendido de unos alambres ligeros. El proyectil se incrusta en el bloque y todo el sistema se balancea hasta una altura h. ¿Cómo se determina la rapidez del proyectil a partir de una medición de h?



a)



b)

Figura 9.9 (Ejemplo 9.6) a) Diagrama de un péndulo balístico. Note que $\vec{\mathbf{v}}_{1A}$ es la velocidad del proyectil inmediatamente antes de la colisión y $\vec{\mathbf{v}}_B$ es la velocidad del sistema proyectil–bloque inmediatamente después de la colisión perfectamente inelástica. b) Fotografía estroboscópica de un péndulo balístico usado en el laboratorio.

SOLUCIÓN Al notar que $v_{2A} = 0$, resuelva la ecuación 9.15 para v_B:

$$1) \quad v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

Analizar Escriba una expresión para la energía cinética total del sistema inmediatamente después de la colisión:

$$2) \quad K_B = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2){v_B}^2$$

Sustituya el valor de v_B de la ecuación 1) en la ecuación 2):

$$K_B = \frac{{m_1}^2 {v_{1A}}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Aplique el principio de conservación de la energía mecánica al sistema:

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

$$\frac{{m_1}^2 {v_{1A}}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

Resuelva para v_{1A}:

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$$

Finalizar Este problema tuvo que resolverse en dos etapas. Cada etapa involucró un sistema diferente y un principio de conservación diferente. Ya que la colisión se considera perfectamente inelástica, alguna energía mecánica se transformó en energía interna. Hubiera sido *incorrecto* igualar la energía cinética inicial del proyectil que entra con la energía potencial gravitacional final de la combinación proyectil–bloque–Tierra.

APLICACIONES:

1) Relojes de péndulo.

2) Plomada.

3) Metrónomos.

4) Para determinar la intensidad de la gravedad.

5) Las esferas pesadas para demolición de edificios.

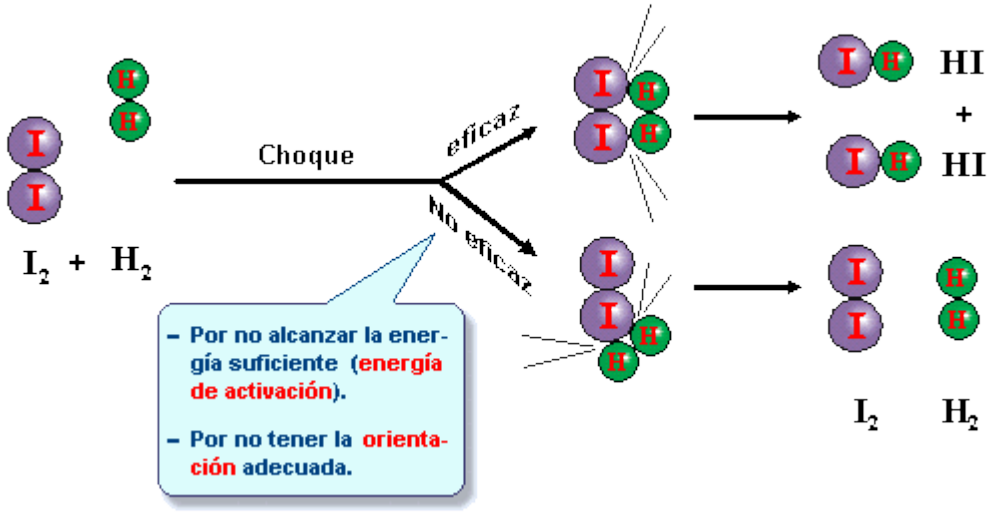
Colisiones en dos dimensiones

Si la colisión es elástica, también se puede usar la ecuación 9.17 (conservación de energía cinética) con $v_{2i} = 0$:

$$\tfrac{1}{2}m_1 {v_{1i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 {v_{1f}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 {v_{2f}}^2 \qquad \textbf{(9.27)}$$

Al conocer la rapidez inicial de la partícula 1 y ambas masas, quedan cuatro incógnitas (v_{1f}, v_{2f}, θ y ϕ). Ya que sólo se tienen tres ecuaciones, se debe proporcionar una de las cuatro cantidades restantes para determinar el movimiento después de la colisión elástica a partir de principios de conservación.

Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y la ecuación 9.27 *no* se aplica.



Colisiones en dos dimensiones

Para tales colisiones en dos dimensiones, se obtienen dos ecuaciones componentes para conservación de cantidad de movimiento:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

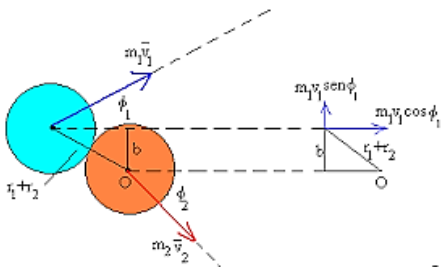
$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

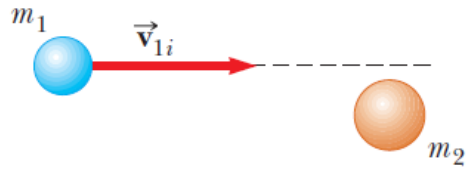
donde tres subíndices en las componentes de velocidad en estas ecuaciones representan, respectivamente, la identificación del objeto (1, 2), los valores inicial y final (i, f) y la componente de velocidad (x, y).

Considere un problema específico en dos dimensiones en el que la partícula 1 de masa m_1 choca con la partícula 2 de masa m_2 inicialmente en reposo, como en la figura 9.11. Después de la colisión (figura 9.11b), la partícula 1 se mueve en un ángulo θ respecto a la horizontal y la partícula 2 se mueve en un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Este evento se llama colisión *oblicua* al aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento en forma de componentes y notar que la componente y inicial de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas es cero, se obtiene

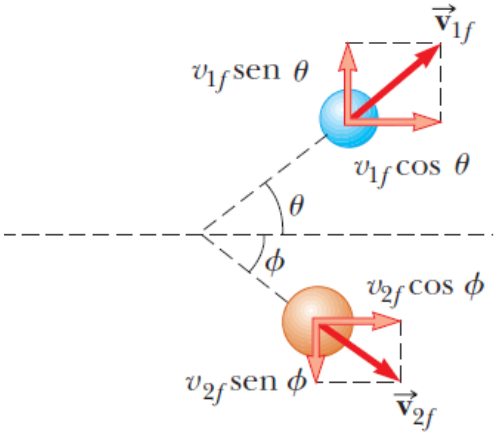
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi \qquad (9.25)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta - m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\phi \qquad (9.26)$$





a) Antes de la colisión

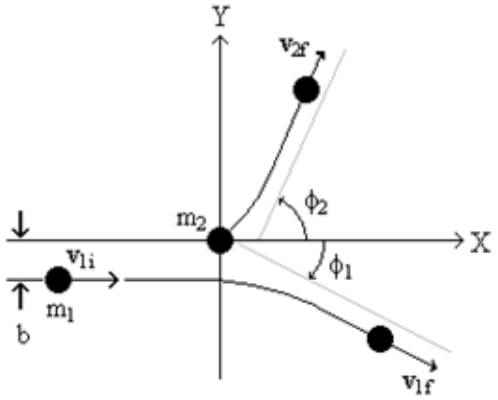


b) Después de la colisión

Figura 9.11 Una colisión elástica indirecta entre dos partículas.

Colisiones bidimensionales:

Según se observa en la figura se tiene una colisión en 2 dimensiones, en la que se supone que la partícula m_2 está inicialmente en reposo. El parámetro de impacto b es la distancia por la cual deja de ser un choque frontal.



Independientemente de la fuerza que actúe entre las partículas, debe conservarse el ímpetu. La fuerza entre las partículas es una fuerza interna que no puede cambiar el ímpetu total del sistema.

El ímpetu se conserva de manera total y por componentes, de modo que:

$$P_{xi} = P_{xf} :\Rightarrow \qquad mv_{1i} = m_1 v_{1f} \text{Cos}\phi_1 + m_2 v_{2f} \text{Cos}\phi_2$$

$$P_{yi} = P_{yf} :\Rightarrow \qquad 0 = m_1 v_{1f} \text{Sen}\phi_1 + m_2 v_{2f} \text{Sen}\phi_2$$

Si la colisión es elástica, se cumple la conservación de la energía, entonces:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Dadas las condiciones iniciales (m_1, m_2, v_{1i}) existen cuatro incógnitas (v_{if}, v_{2f}, ϕ_1, ϕ_2). Se requiere conocer una cantidad más, digamos ϕ_1 para encontrar una solución única.

Nota: es posible demostrar que en una colisión elástica entre partículas de igual masa, una de las cuales está inicialmente en reposo, las partículas que reculan se desvían siempre en ángulos rectos entre si.

□

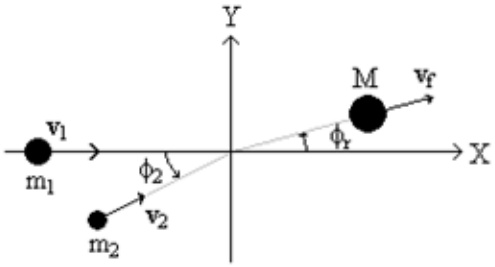
Colisiones en dos dimensiones

Colisiones inelásticas en dos dimensiones:

En este caso ya no aplica la ecuación de la conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Suponiendo que, en el caso de la colisión mostrada es la figura, ambos cuerpos estén inicialmente en movimiento, por la disposición que presentan se puede escribir:



X: $$m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\phi_2 = M v_f \cos\phi_r$$

Y: $$m_2 v_2 \operatorname{Sen}\phi_2 = M v_f \operatorname{Sen}\phi_r$$

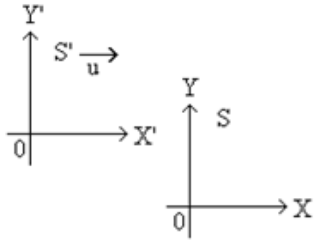
Donde $M = m_1 + m_2$. Y como solo se tienen v_f y ϕ_r como incógnitas, el sistema tiene solución.

Marco de referencia del centro de masa:

Considérese el caso sencillo de una colisión unidimensional (de frente) entre dos partículas idénticas. En el marco de referencia ubicado en la posición del centro de masa, las dos partículas se aproximan entre si antes de la colisión, cada una a velocidad v/2, y retroceden ambas a la misma velocidad después de la colisión. El centro de masa de m_1 y m_2 se mueve a la misma velocidad v_{cm} todo el tiempo.

La velocidad del centro de masa es: $v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$; con $v_{2i} = 0$

Ahora bien, para un marco de referencia en movimiento S', se tiene que $v = v' + u$.



Donde v es la velocidad medida en el marco S del laboratorio; v' es la velocidad medida en el marco que se mueve S' con velocidad u.

En este caso, el marco móvil S' es el marco del centro de masa y $u = v_{cm}$.

$$\Rightarrow \quad v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$\Rightarrow \quad v'_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$\Rightarrow \quad v'_{1f} = v_{1f} - v_{cm} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$\Rightarrow \quad v'_{2f} = v_{2f} - v_{cm} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

En el marco del centro de masa las velocidades de m_1 y m_2 simplemente invierten direcciones en la colisión y la energía permanece constante.

En la colisión unidimensional completamente inelástica, en el marco de referencia del centro de masa, las velocidades de m_1 y m_2 se transforman como en el caso anterior. La velocidad final del centro de masa de $M = m_1 + m_2$ después de la colisión puede hallarse al transformar el resultado general para v_f en el marco del laboratorio.

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad \Rightarrow \qquad v_f' = v_f - v_{cm}$$

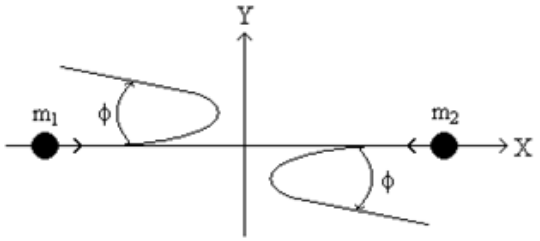
$$\Rightarrow \qquad v_f' = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} = 0$$

Lo cual resulta lógico, ya que en el marco del centro de más, la masa total M está ubicada en el centro de másа.

En el marco de referencia del centro de masa se tiene una pérdida de energía cinética del 100 % independientemente de las masas m_1 y m_2.

Para el caso de colisiones elásticas bidimensionales el tratamiento es similar, solo que más complicado.

En la colisión vista desde el centro de masa, las partículas se mueven en direcciones opuestas y se desván el mismo ángulo.



En el marco de referencia del laboratorio, por lo general los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 son distintos.

□

Coeficiente de Restitución

Para caracterizar el tipo de colisión del que se trata se define un parámetro denominado *coeficiente de restitución*

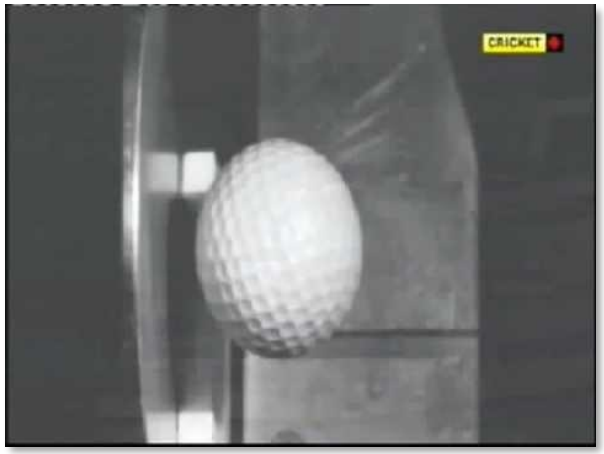
$$C_R = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}}$$

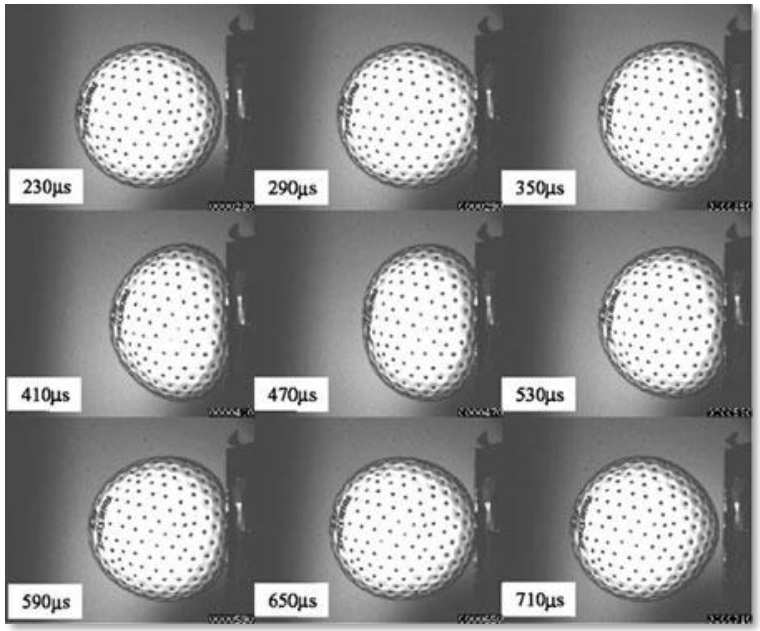
que en términos geométricos representa la proporción entre la velocidad relativa con la que se alejan las partícula y la velocidad con la que se acercaban. El coeficiente de restitución tiene l mismo valor en el sistema laboratorio que en el sistema centro de masas.

En una colisión perfectamente elástica, $C_R = 1$ y las partículas se alejan con la misma velocidad con la que se acercaban.

En una colisión completamente inelástica, $C_R = 0$ y las partículas no se alejan tras la colisión.

Para un caso intermedio se tendrá que $0 < C_R < 1$.





Rendimiento de las bolas de golf

Los hoyuelos y la resistencia

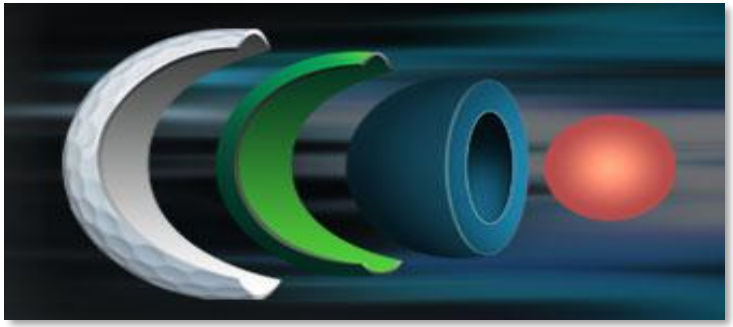
Los patrones de hoyuelos se han diseñado para minimizar la resistencia, es decir, la fuerza que se opone al movimiento de la bola.

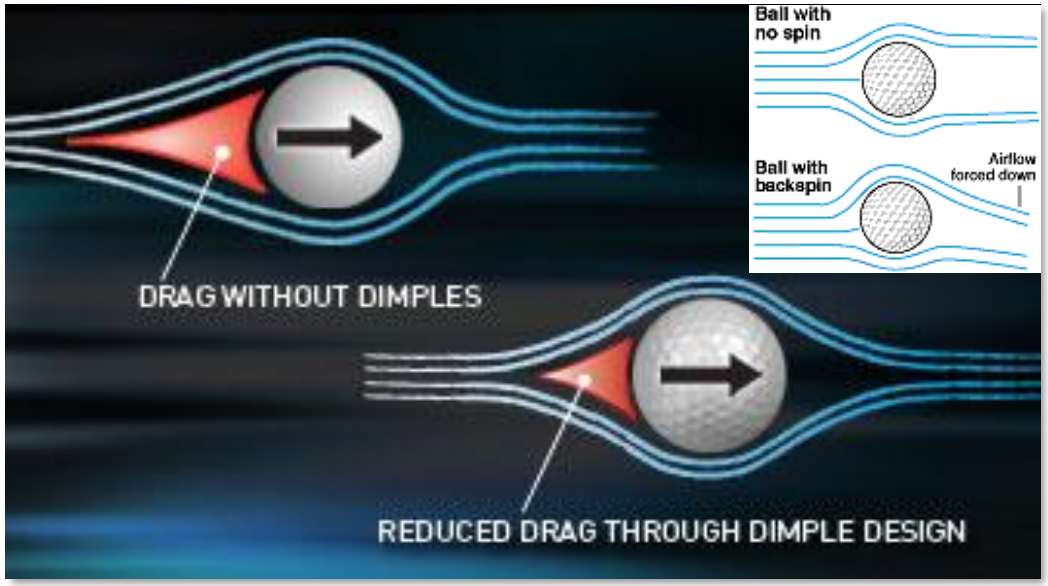
Al pasar sobre una bola de superficie lisa, la corriente de aire es laminar (es decir, su flujo es uniforme) y se aparta de la bola dejando una gran estela detrás de ella, que ocasiona resistencia.

Con la adición de los hoyuelos a la bola, la corriente de aire se convierte en turbulenta (es decir, el flujo no es uniforme) y permanece más cerca de la bola durante más tiempo lo que reduce la estela y, a su vez, la resistencia.

Núcleo

El núcleo de todas las bolas sólidas está hecho de polibutadieno (caucho sintético), un material con una capacidad de respuesta extremadamente elevada que devuelve la mayor parte de la energía que se le aplica.





EJEMPLO 9.8 Colisión en un cruce

Un automóvil de 1 500 kg, que viaja al este con una rapidez de 25.0 m/s, choca en un cruce con una camioneta de 2 500 kg que viaja al norte con una rapidez de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 9.12. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad del choque después de la colisión, y suponga que los vehículos quedan unidos después de la colisión.

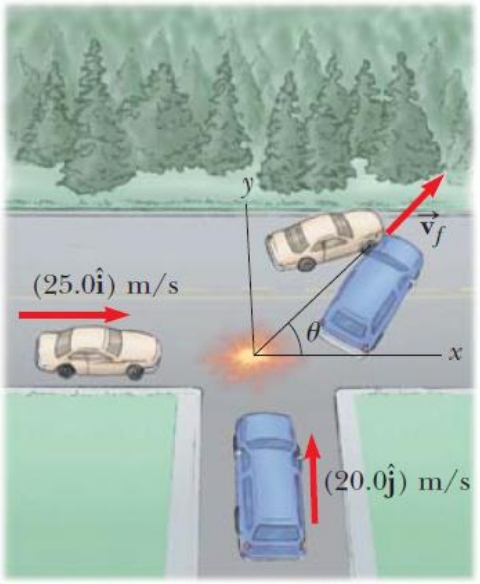


Figura 9.12 (Ejemplo 9.8) Un automóvil que viaja hacia el este choca con una camioneta que viaja hacia el norte.

SOLUCIÓN

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema en la dirección x:

$$\sum p_{xi} = (1\,500\text{ kg})(25.0\text{ m/s}) = 3.75 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento final en la dirección x:

$$\sum p_{xf} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final en la dirección x:

$$1)\quad 3.75 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta$$

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema en la dirección y:

$$\sum p_{yi} = (2\,500\text{ kg})(20.0\text{ m/s}) = 5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento final en la dirección y:

$$\sum p_{yf} = (4\,000\text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final en la dirección y:

$$2)\quad 5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta$$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) y resuelva para θ:

$$\frac{(4\,000\text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta}{(4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta} = \tan\theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33 \qquad \theta = 53.1°$$

Use la ecuación 2) para encontrar el valor de v_f:

$$v_f = \frac{5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{(4\,000\text{ kg})\operatorname{sen} 53.1°} = 15.6\text{ m/s}$$

EJEMPLO

La figura muestra un juego de feria popular, en el cual un jugador trata de ver que tan alto puede elevar un peso marcador al golpear un blanco con un mazo.

Determinar qué cantidad física mide el aparato. Si es la fuerza promedio, la fuerza máxima, el trabajo realizado, el impulso, la energía transferida, el ímpetu transferido, o cualquier otra cosa.

SOLUCIÓN

A final de cuentas, la máquina mide que tan alto se puede hacer llegar el peso marcador. Cuando este toca la campana se ha logrado alcanzar la máxima altura, es decir que se ha cedido a la masa una energía cinética mayor o igual a mgh, donde m es por supuesto la masa del peso marcador.

Como no importa la trayectoria que haya seguido el mazo, la máquina no es capaz de medir la fuerza aplicada (que será la suma de la fuerza de gravedad sobre el mazo más la que le logre imprimir el jugador).

Tampoco mide la energía pues una parte de esta se perderá en el choque (en forma de calor) y otra se consumirá como energía interna del jugador; y no hay modo de cuantificarlas.

De modo que solo puede medir la velocidad inicial con la que se elevará el peso marcador y este será una consecuencia de la cantidad de movimiento transferido del mazo durante el golpe, cuyo tiempo de duración no se conoce, por lo que en términos formales no precisa la cantidad $I = F\Delta t$.

Por tanto puede decirse que la máquina mide únicamente la cantidad de movimiento, momento lineal, ímpetu o momentum.

EJEMPLO 9.14 El cohete que explota

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1 000 m y una rapidez de 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de 450 m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de 240 m/s y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

SOLUCIÓN

Analizar Ya que los tres fragmentos tienen igual masa, la masa de cada fragmento es $M/3$, donde M es la masa total del cohete. Sea $\vec{\mathbf{v}}_f$ que representa la velocidad desconocida del tercer fragmento.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema antes de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = M\vec{\mathbf{v}}_i = M(300\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema después de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_f = \frac{M}{3}(240\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f$$

Iguale estas dos expresiones:

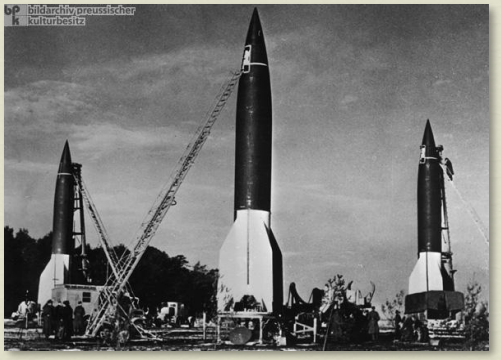
$$\frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f + \frac{M}{3}(240\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) = M(300\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$$

Resuelva para $\vec{\mathbf{v}}_f$:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (-240\,\hat{\mathbf{i}} + 450\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$$

HISTORIA DE LOS COHETES MODERNOS

El mayor de las SS Wernher von Braun en 1943 (círculo rojo). Presentación a los dignatarios nazis del centro de investigación Peenemünde donde fue concebida la «guerra de las galaxias» y realizados los cohetes V2 nazis. Von Braun se convirtió posteriormente en director de la NASA estadounidense.



Wernher Magnus Maximilian Freiherr von Braun

Wernher von Braun en mayo de 1964 en su despacho del Marshall Space Flight Center, Huntsville (Alabama), con varios modelos de sus cohetes.

Nacimiento	23 de marzo de 1912 Wyrzysk, Imperio Alemán, actual Polonia
Fallecimiento	16 de junio de 1977 (65 años) Alexandria, Virginia, Estados Unidos
Residencia	Alemania y Estados Unidos
Nacionalidad	Alemán y Estadounidense
Campo	Ingeniería aeronáutica
Instituciones	Tercer Reich NASA
Alma máter	Universidad Técnica de Berlín
Conocido por	Diseño y construcción del V2 y Saturno 5

Supuestas Armas Secretas de los Nazis

Ala voladora

Tanque volador

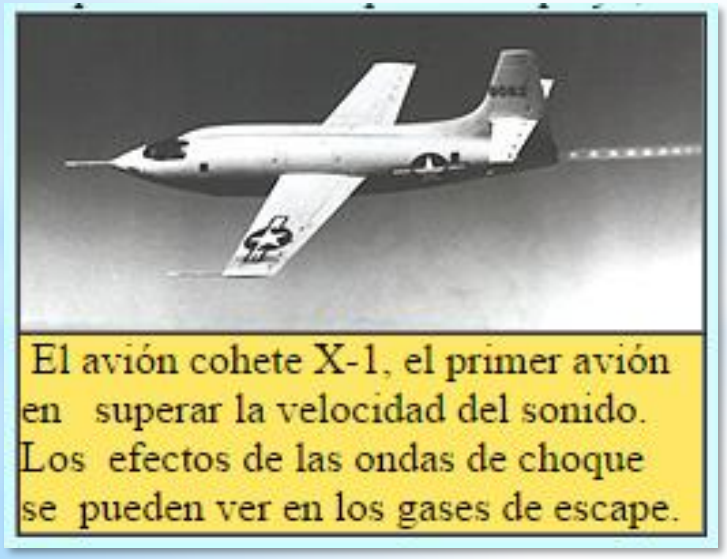
OVNIS

Submarinos

Minas móviles

Despegue Vertical

La Conquista del Cielo



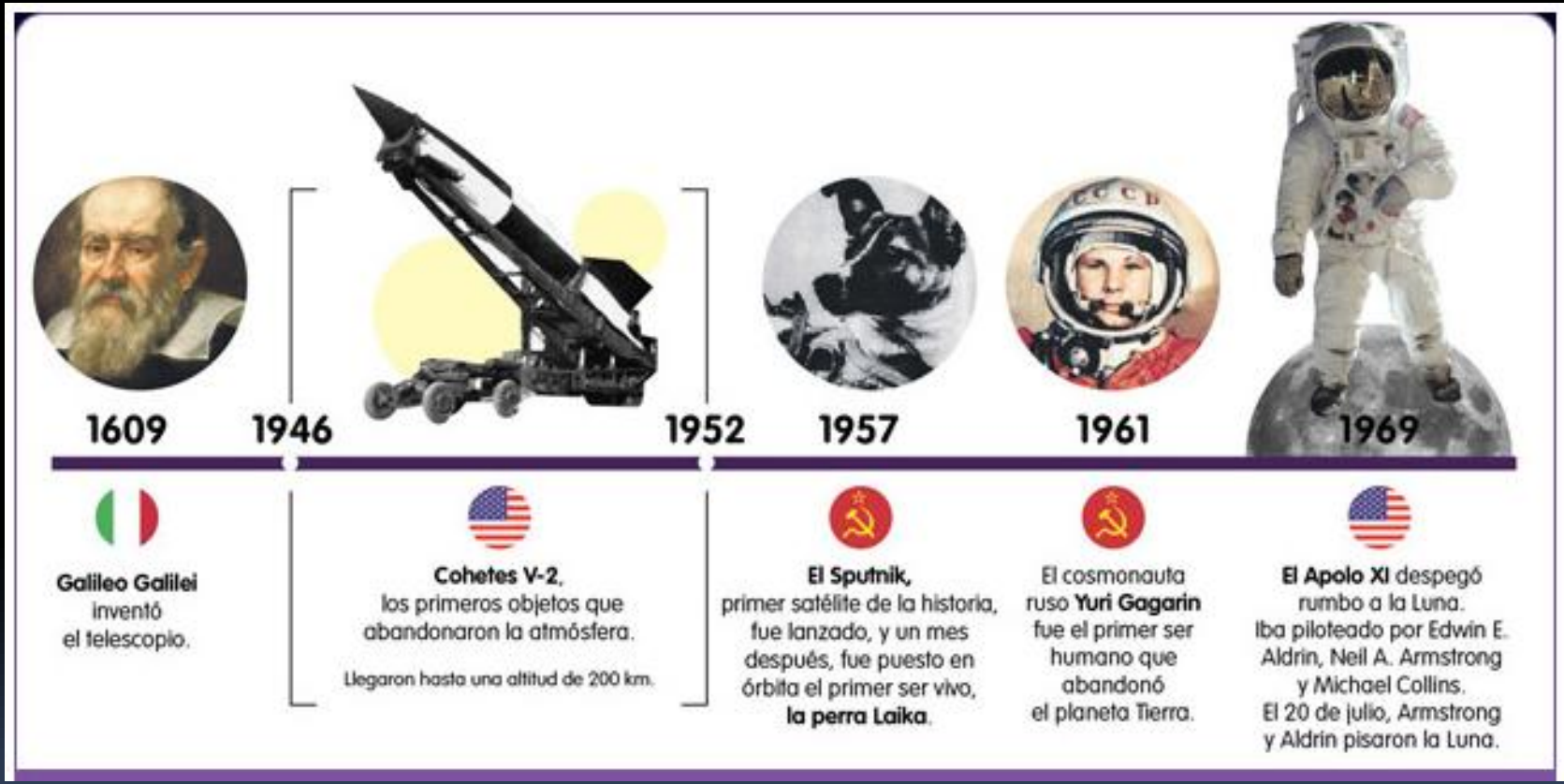
El avión cohete X-1, el primer avión en superar la velocidad del sonido. Los efectos de las ondas de choque se pueden ver en los gases de escape.

El Cohete Atlas

Los vuelos hacia la Luna solo fueron posibles con una tecnología en la que el combustible constituyese una mayor fracción de la masa.

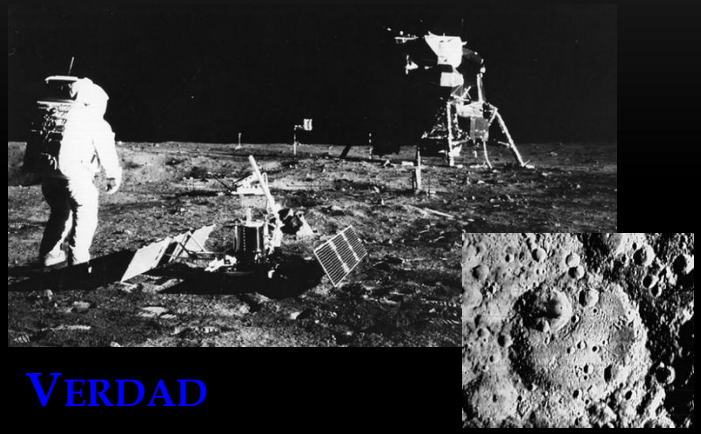
De la masa del misil Atlas, construido en los años 1950 y que fue usado por los primeros astronautas, el 97% de la misma, aproximadamente, era combustible.

La Conquista del Espacio

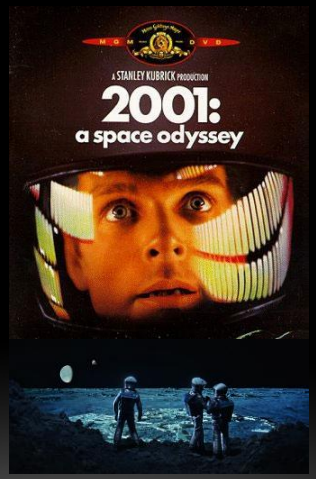


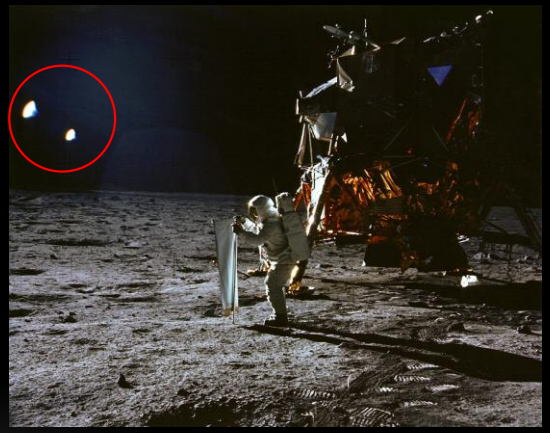
Llegada a la Luna

MISIÓN APOLLO 11



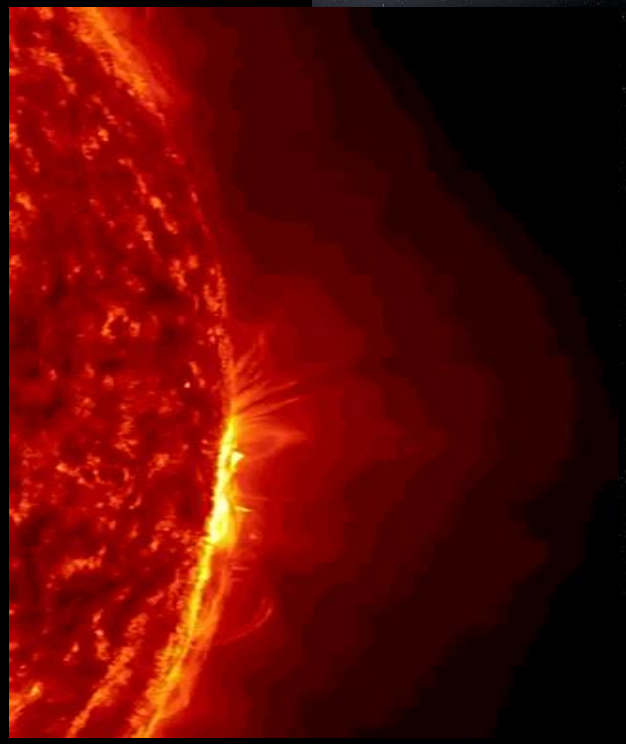
VERDAD

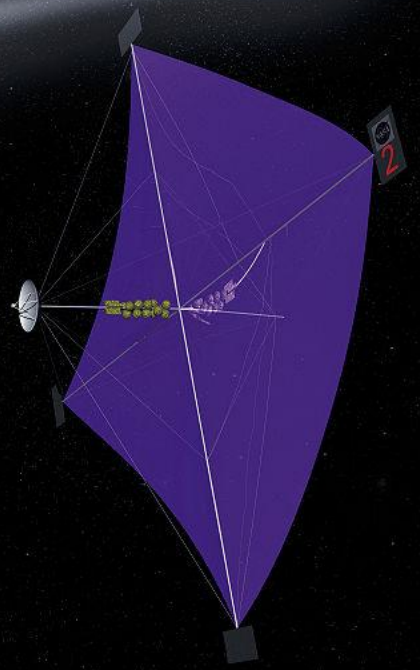


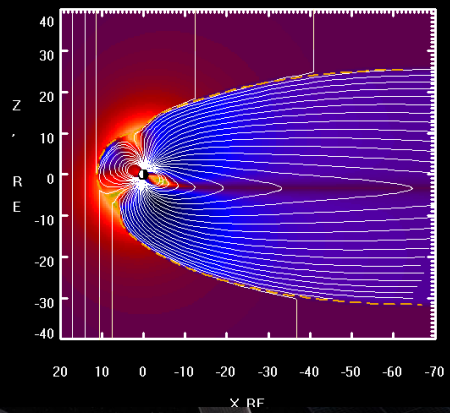


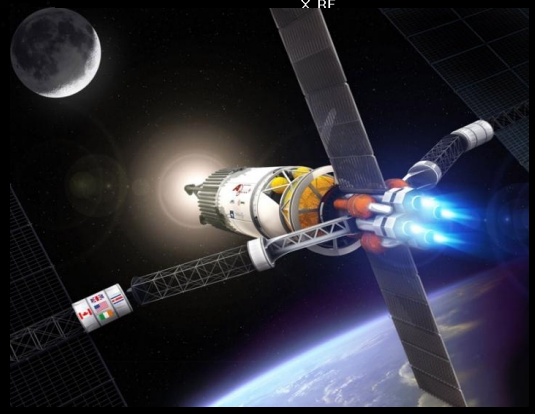
MENTIRA

Propulsión en el Espacio







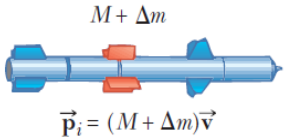


Propulsión de cohetes

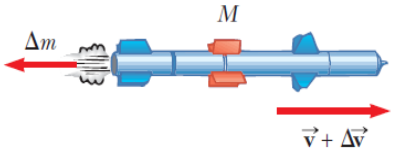
La operación de un cohete depende de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un sistema de partículas, donde el sistema es el cohete más su combustible expulsado.

Ya que a los gases se les da cantidad de movimiento cuando se expulsan del motor, el cohete recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta.

Suponga que en algún tiempo t la magnitud de la cantidad de movimiento de un cohete más su combustible es $(M + \Delta m)v$, donde v es la rapidez del cohete en relación con la Tierra (figura 9.23a). En un intervalo de tiempo breve Δt, el cohete expulsa combustible de masa Δm. Al final de este intervalo, la masa del cohete es M y su rapidez es $v + \Delta v$, donde Δv es el cambio en rapidez del cohete (figura 9.23b). Si el combustible se expulsa con una rapidez v_e en relación con el cohete (el subíndice e representa *escape* y v_e usualmente se llama *rapidez de escape*), la velocidad del combustible relativa a la Tierra es $v - v_e$.



a)



b)

Figura 9.23 Propulsión de cohete. a) La masa inicial del cohete más todo su combustible es $M + \Delta m$ en un tiempo t, y su rapidez es v. b) En un tiempo $t + \Delta t$, la masa del cohete se redujo a M y se expulsó una cantidad de combustible Δm. La rapidez del cohete aumenta por una cantidad Δv.

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

Al simplificar esta expresión se obtiene

$$M\Delta v = v_e\,\Delta m$$

Si ahora se toma el límite conforme Δt tiende a cero, se tiene $\Delta v \to dv$ y $\Delta m \to dm$.

el aumento en la masa de escape dm corresponde a una igual disminución en la masa del cohete, así que $dm = -dM$.

$$M\,dv = v_e\,dm = -v_e\,dM$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Expresión para propulsión de cohete ▶

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

Empuje de un Cohete

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Expresión para propulsión de cohete ▶

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

El **empuje** en el cohete es la fuerza que ejercen sobre él los gases de escape expulsados. A partir de la segunda ley de Newton y de la ecuación 9.42 se obtiene la siguiente expresión para el empuje:

$$\text{Empuje} = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| \qquad \textbf{(9.44)}$$

Esta expresión muestra que el empuje aumenta conforme la rapidez de escape aumenta y conforme aumenta la relación de cambio de masa (llamada *rapidez de consumo*).

Fuerza de Empuje

La fuerza del dispositivo manual impulsado por nitrógeno permite a un astronauta moverse libremente en el espacio sin correas restrictivas, con el uso de la fuerza de empuje proveniente del nitrógeno expulsado.

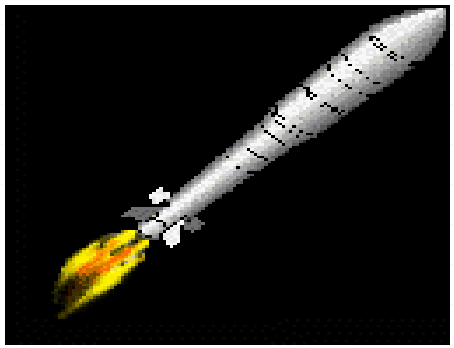
$$\text{Empuje} = M\frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

EJEMPLO 9.17 Un cohete en el espacio

Un cohete que se mueve en el espacio, lejos de todos los otros objetos, tiene una rapidez de 3.0×10^3 m/s en relación con la Tierra. Sus motores se encienden y el combustible se expulsa en una dirección opuesta al movimiento del cohete con una rapidez de 5.0×10^3 m/s en relación con el cohete.

A) ¿Cuál es la rapidez del cohete en relación con la Tierra una vez que la masa del cohete se reduce a la mitad de su masa antes de la ignición?

B) ¿Cuál es el empuje sobre el cohete si quema combustible en una proporción de 50 kg/s?



SOLUCIÓN

A)

Resuelva para la velocidad final y sustituya los valores conocidos:

$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$= 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} + (5.0 \times 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{M_i}{0.5M_i}\right)$$

$$= 6.5 \times 10^3 \text{ m/s}$$

B)

Use la ecuación el resultado del inciso A), y note que $dM/dt = 50$ kg/s:

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = (5.0 \times 10^3 \text{ m/s})(50 \text{ kg/s}) = 2.5 \times 10^5 \text{ N}$$

EJEMPLO

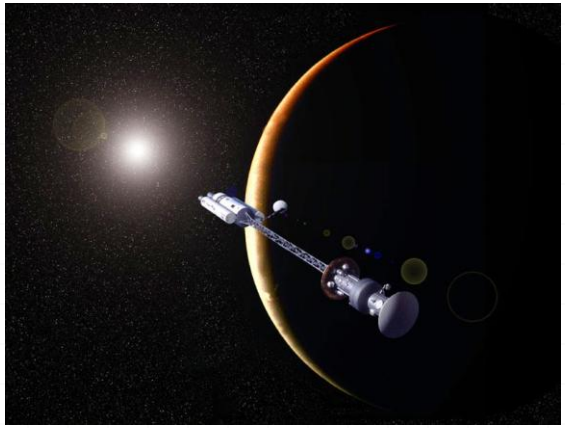
Un procedimiento propuesto para enviar astronautas a Marte incluye armar una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra, evitando así la necesidad de que la nave espacial venza la mayor parte de la gravedad de la Tierra en su partida. Suponga que dicha nave espacial tiene una capacidad de carga de 50 000 kg, 2 000 000 kg de combustible, y puede expulsar el propelente con una velocidad de 23.5 km/s (los propelentes actuales de cohetes producen una velocidad máxima de aproximadamente 5 km/s, pero con la propulsión electromagnética de cohetes se predice que producirá una velocidad quizá de 40 km/s).

¿Cuál es la velocidad final que puede alcanzar esta nave espacial, relativa a la velocidad que tenía inicialmente en su órbita alrededor de la Tierra?

SOLUCIÓN

$$v_f - v_i = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = (23.5 \text{ km/s}) \ln\left(\frac{2\,050\,000 \text{ kg}}{50\,000 \text{ kg}}\right) = (23.5 \text{ km/s})(\ln 41) = 87.3 \text{ km/s}.$$

Para comparación, el cohete Saturn V de etapas múltiples, que llevó a los astronautas a la Luna a finales de la década de 1960 y principios de la década de 1970, podía alcanzar una rapidez de sólo 12 km/s.



Resumen

DEFINICIONES

La **cantidad de movimiento lineal** $\vec{\mathbf{p}}$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ es

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}} \tag{9.2}$$

El **impulso** que se imparte a una partícula mediante una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es igual a la integral en el tiempo de la fuerza:

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.9}$$

En una **colisión inelástica** no se conserva la energía cinética total del sistema de partículas en colisión. En una **colisión perfectamente inelástica** las partículas en colisión quedan unidas después de la colisión. En una **colisión elástica** se conserva la energía cinética del sistema.

El vector de posición del **centro de masa** de un sistema de partículas se define como

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \tag{9.31}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema y $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i–ésima partícula.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El vector de posición del centro de masa de un objeto extendido se obtiene a partir de la expresión integral

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm \tag{9.34}$$

La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas es

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M} \tag{9.35}$$

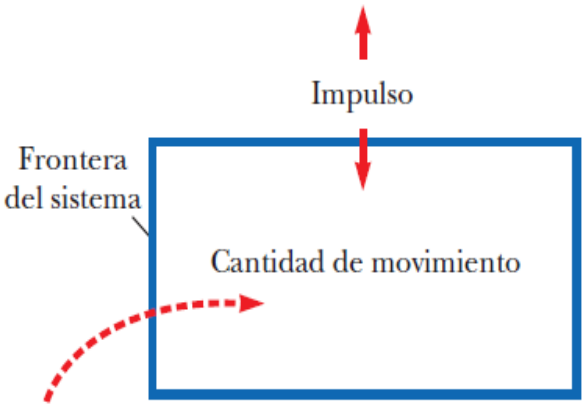
La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

La segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas es

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} \tag{9.39}$$

donde $\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}$ es la aceleración del centro de masa y la suma es sobre todas las fuerzas externas. El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza externa resultante en el sistema.

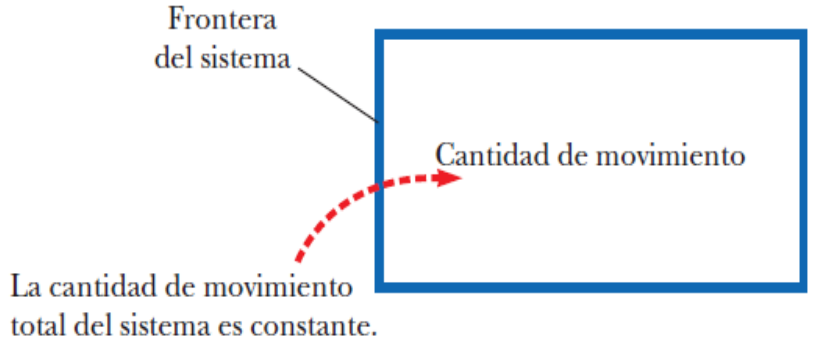
MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



El cambio en la cantidad de movimiento total del sistema es igual al impulso total sobre el sistema.

Sistema no aislado (cantidad de movimiento). Si un sistema interactúa con su entorno en el sentido de que hay una fuerza externa sobre el sistema, el comportamiento del sistema se describe mediante el **teorema impulso–cantidad de movimiento**:

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} \qquad (9.40)$$



La cantidad de movimiento total del sistema es constante.

Sistema aislado (cantidad de movimiento). El principio de **conservación de cantidad de movimiento lineal** indica que la cantidad de movimiento total de un sistema aislado (sin fuerzas externas) se conserva sin importar la naturaleza de las fuerzas entre los integrantes del sistema:

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \left(\text{cuando} \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0\right) \qquad (9.41)$$

En el caso de un sistema de dos partículas, este principio se expresa como

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} \qquad (9.5)$$

El sistema puede ser aislado en términos de cantidad de movimiento pero no aislado en términos de energía, como en el caso de colisiones inelásticas.

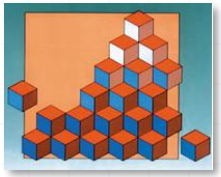
Curso de Mecánica Vectorial

- Movimiento en una dimensión
- Vectores
- Movimiento en dos dimensiones
- Las leyes del movimiento
- Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton
- Energía de un sistema
- Conservación de energía
- Cantidad de movimiento lineal y colisiones
- Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo
- Cantidad de movimiento angular

Una clavadista competitiva experimenta una rotación durante un clavado. Ella logra girar a una rapidez más alta cuando dobla su cuerpo y forma con él un paquete más pequeño, esto se debe al principio de conservación de cantidad de movimiento angular.

- Producto vectorial y momento de torsión
- Cantidad de movimiento angular: el sistema no aislado
- Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio
- El sistema aislado: conservación de cantidad de movimiento angular

Objetivos de la Lección



Al terminar esta lección el alumno será capaz de:

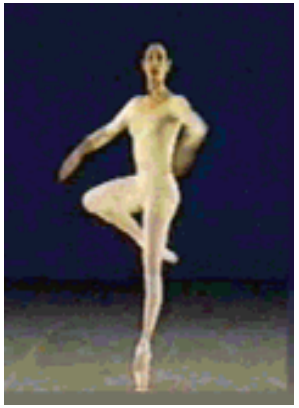
- *Distinguir el concepto de cantidad de momento de inercia.*
- *Explicar el Teorema de Ejes Paralelos.*
- *Reconocer el momento de torsión en un objeto rígido que gira.*
- *Resolver problemas usando los conceptos de energía para el movimiento rotacional.*
- *Aplicar los conceptos estudiados en problemas con la conservación del momento angular.*

Momentos de inercia

El momento de inercia es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo que refleja la distribución de masas de un cuerpo o un sistema de partículas en rotación, respecto al eje de giro.

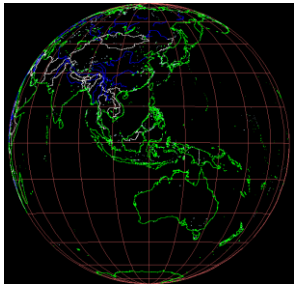
El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

El momento de inercia desempeña un papel análogo al de la masa inercial en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme.



Cálculo de momentos de inercia

El momento de inercia de un objeto extendido se evalúa al considerar el objeto dividido en muchos elementos pequeños, cada uno de los cuales tiene masa Δm_i. Se usa la definición $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$ y se toma el límite de esta suma a medida que $\Delta m_i \to 0$. En este límite, la suma se convierte en una integral sobre el volumen del objeto:



Momento de inercia de un objeto rígido ▶

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

Por lo común es más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen de los elementos en lugar de su masa

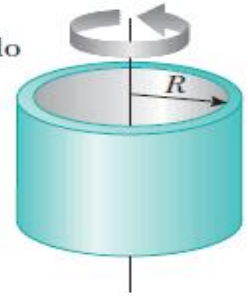
$$I = \int \rho r^2 \, dV$$

TABLA 10.2

Momentos de inercia de objetos rígidos homogéneos con diferentes geometrías

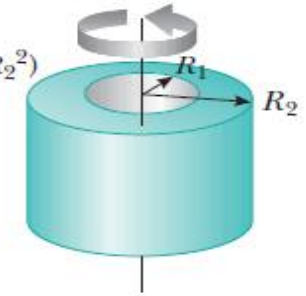
Aro o cascarón cilíndrico delgado

$I_{CM} = MR^2$



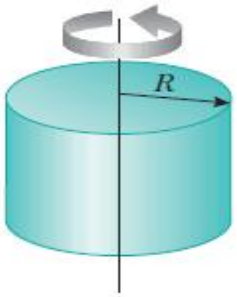
Cilindro hueco

$I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$



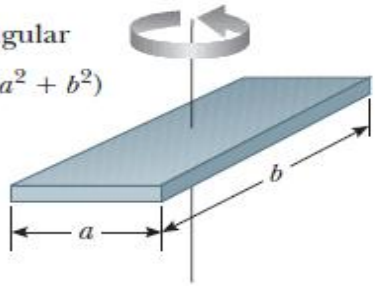
Cilindro sólido o disco

$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$



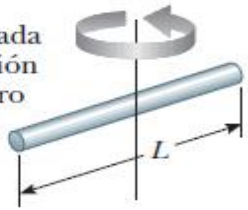
Placa rectangular

$I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



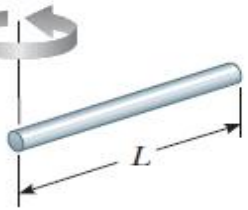
Barra larga delgada con eje de rotación a través del centro

$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$



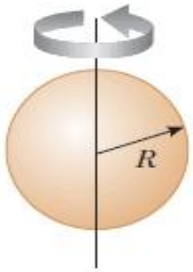
Barra larga delgada con eje de rotación a través de un extremo

$I = \frac{1}{3}ML^2$



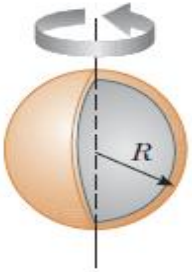
Esfera sólida

$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$



Cascarón esférico delgado

$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$



EJEMPLO 10.4 Barra rígida uniforme

Calcule el momento de inercia de una barra rígida uniforme de longitud L y masa M (figura 10.9) en torno a un eje perpendicular a la barra (el eje y) y que pasa a través de su centro de masa.

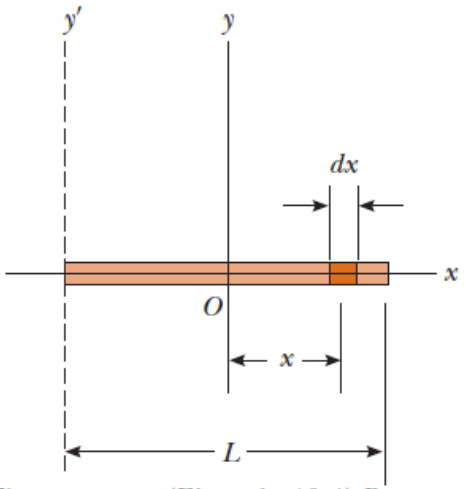


Figura 10.9 (Ejemplo 10.4) Barra rígida uniforme de longitud L. El momento de inercia en torno al eje y es menor que en el eje y'.

SOLUCIÓN

Exprese dm en términos de dx:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L}\,dx$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.17 con $r^2 = x^2$:

$$I_y = \int r^2\,dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2\,\frac{M}{L}\,dx = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx$$

$$= \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12}ML^2$$

EJEMPLO 10.5 Cilindro sólido uniforme

Un cilindro sólido uniforme tiene un radio R, masa M y longitud L. Calcule su momento de inercia en torno a su eje central (el eje z en la figura 10.10).

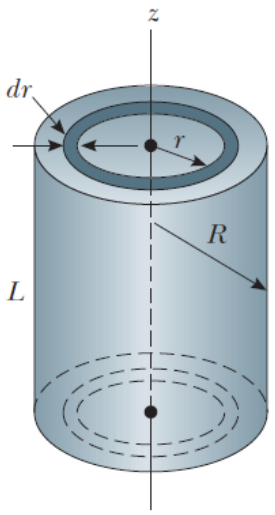


Figura 10.10 (Ejemplo 10.5) Cálculo de I en torno al eje z para un cilindro sólido uniforme.

SOLUCIÓN

Exprese dm en términos de dr: $dm = \rho dV = 2\pi\rho L r\, dr$

Sustituya esta expresión :

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 (2\pi\rho L r\, dr) = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

Use el volumen total $\pi R^2 L$ del cilindro para expresar su densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

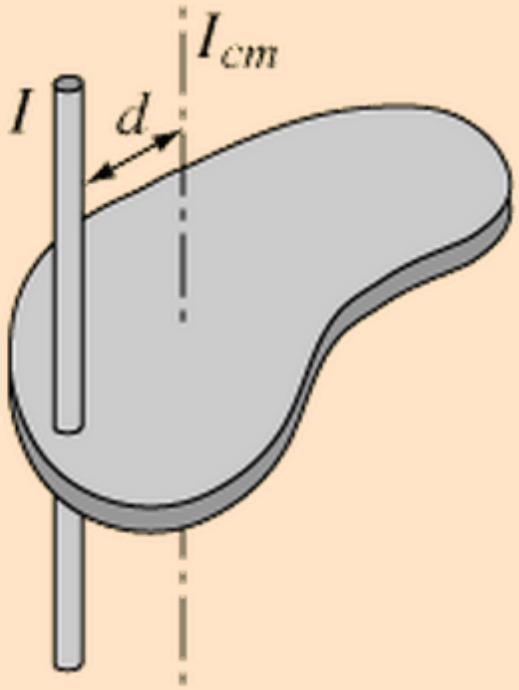
Sustituya este valor en la expresión para I_z:

$$I_z = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{M}{\pi R^2 L}\right) L R^4 = \tfrac{1}{2} M R^2$$

TEOREMA DE EJES PARALELOS

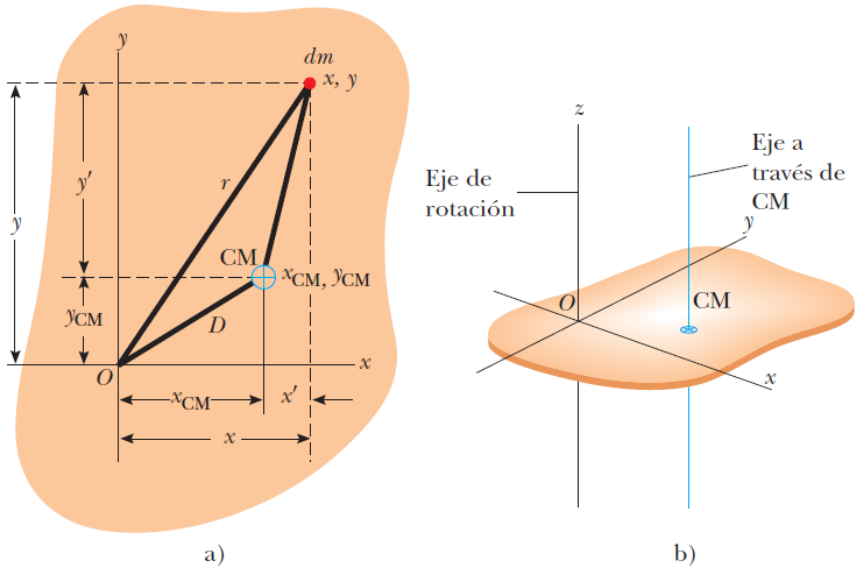
El momento de inercia de cualquier objeto sobre un eje a traves de su centro de masa es el momento de inercia mínimo sobre un eje en esa direccion del espacio. El momento de inercia sobre un eje paralelo a ese eje que pasa por el centro de masa está dado por

$$I_{\text{parallel axis}} = I_{cm} + Md^2$$



La expresión añadida al momento de inercia sobre el centro de masa se reconoce como el momento de inercia de una masa puntual. El momento de inercia en torno a un eje paralelo es la suma del momento de inercia del objeto sobre su centro de masa, más el momento de inercia de todo el objeto -tratado como una masa puntual en el centro de masa- sobre ese eje paralelo.

TEOREMA DE EJES PARALELOS



$$I = \int r^2\, dm = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$x = x' + x_{CM},\ y = y' + y_{CM}$$
$$y\ z = z' = 0$$

Figura 10.11 a) Teorema de ejes paralelos. Si el momento de inercia en torno a un eje perpendicular a la figura a través del centro de masa es I_{CM}, el momento de inercia en torno al eje z es $I_z = I_{CM} + MD^2$. b) Dibujo en perspectiva que muestra el eje z (el eje de rotación) y el eje paralelo a través del centro de masa.

$$I = \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2]\, dm$$

$$= \int [(x')^2 + (y')^2]\, dm + 2x_{CM} \int x'\, dm + 2y_{CM} \int y'\, dm + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia I_{CM} en torno a un eje que es paralelo al eje z y pasa a través del centro de masa. Las segundas dos integrales son cero porque, por definición del centro de masa, $\int x'\, dm = \int y'\, dm = 0$. La última integral es simplemente MD^2 porque $\int dm = M$ y $D^2 = x_{CM}^2 + y_{CD}^2$. En consecuencia, se concluye que

$$I = I_{CM} + MD^2$$

◄ Teorema de ejes paralelos

EJEMPLO 10.6 Aplicación del teorema de ejes paralelos

Considere una vez más la barra rígida uniforme de masa M y longitud L que se muestra en la figura 10.9. Encuentre el momento de inercia de la barra en torno a un eje perpendicular a la barra a través de un extremo (el eje y' en la figura 10.9).

$$I_y = \tfrac{1}{12}ML^2$$

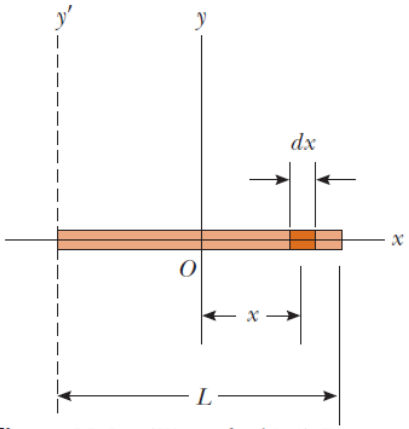


Figura 10.9 (Ejemplo 10.4) Barra rígida uniforme de longitud L. El momento de inercia en torno al eje y es menor que en el eje y'. Este último eje se examina en el ejemplo 10.6.

SOLUCIÓN

Use el teorema de ejes paralelos:

$$I = I_{CM} + MD^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2$$

Momento de torsión

$$\tau \equiv rF \operatorname{sen} \phi = Fd$$

La cantidad d se llama **brazo de momento** (o *brazo de palanca*) de $\vec{\mathbf{F}}$.

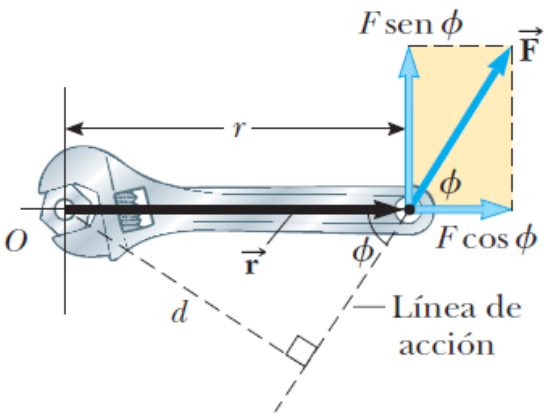


Figura 10.12 La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ tiene una mayor tendencia de rotación en torno a un eje a través de O a medida que F aumenta y a medida que el brazo de momento d aumenta. La componente F sen ϕ tiende a dar vueltas la llave en torno a O.

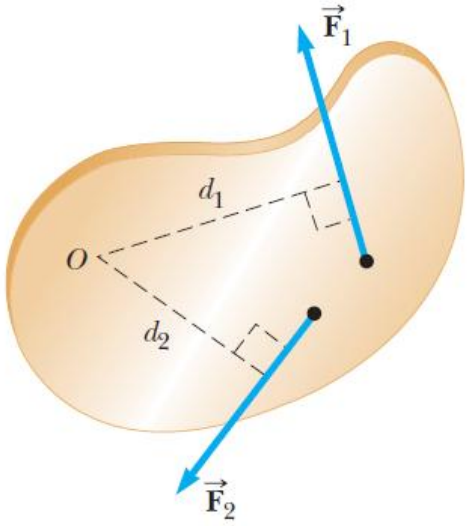
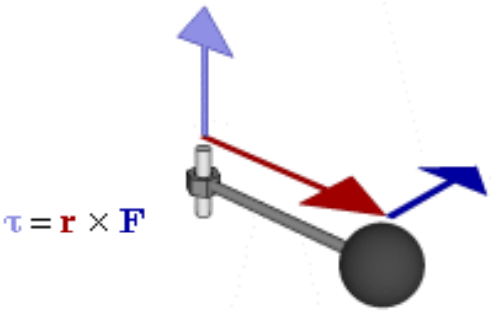
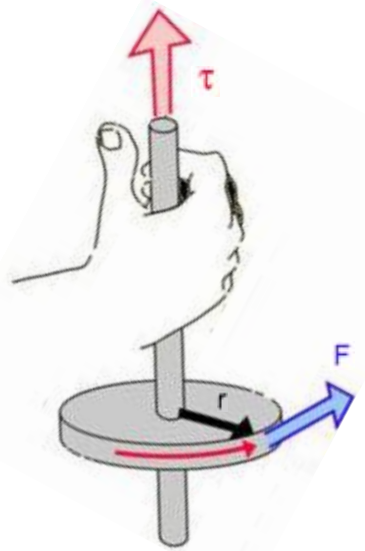


Figura 10.13 La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tiende a dar vuelta el objeto contra las manecillas del reloj en torno a un eje a través de O, y $\vec{\mathbf{F}}_2$ tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj.

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$





EJEMPLO 10.7 El momento de torsión neto sobre un cilindro

A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura 10.14, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una soga enrollada en torno al tambor, que tiene radio R_1, ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{T}}_1$ hacia la derecha sobre el cilindro. Una soga enrollada en torno a la parte central, que tiene radio R_2, ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{T}}_2$ hacia abajo sobre el cilindro.

A) ¿Cuál es el momento de torsión neto que actúa en el cilindro en torno al eje de rotación (que es el eje z en la figura 10.14)?

B) Suponga $T_1 = 5.0$ N, $R_1 = 1.0$ m, $T_2 = 15.0$ N y $R_2 = 0.50$ m. ¿Cuál es el momento de torsión neto en torno al eje de rotación, y de qué forma da vuelta el cilindro si parte desde el reposo?

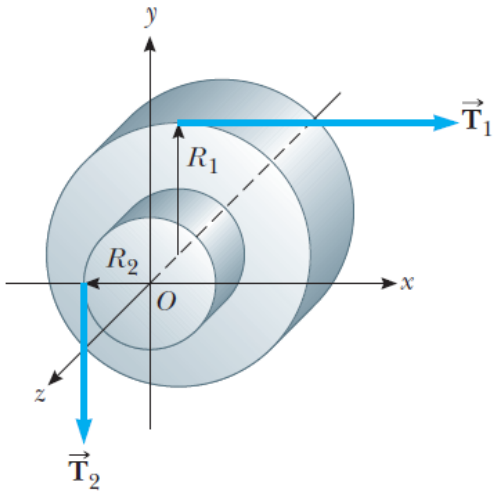


Figura 10.14 (Ejemplo 10.7) Un cilindro sólido articulado en torno al eje z a través de O. El brazo de momento $\vec{\mathbf{T}}_1$ es R_1, y el brazo de momento de $\vec{\mathbf{T}}_2$ es R_2.

SOLUCIÓN

A)

Evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de rotación:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2 T_2 - R_1 T_1$$

Como una verificación rápida, observe que si las dos fuerzas son de igual magnitud, el momento de torsión neto es negativo porque $R_1 > R_2$. Si parte del reposo con ambas fuerzas de igual magnitud actuando sobre él, el cilindro daría vuelta en sentido de las manecillas del reloj porque $\vec{\mathbf{T}}_1$ sería más efectivo para girarlo de lo que sería $\vec{\mathbf{T}}_2$.

B)

Sustituya los valores conocidos:

$$\sum \tau = (0.50\ \text{m})(15\ \text{N}) - (1.0\ \text{m})(5.0\ \text{N}) = 2.5\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Ya que este momento de torsión es positivo, el cilindro comienza a dar vuelta en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Objeto rígido bajo un momento de torsión neto

$$\sum F_t = ma_t$$

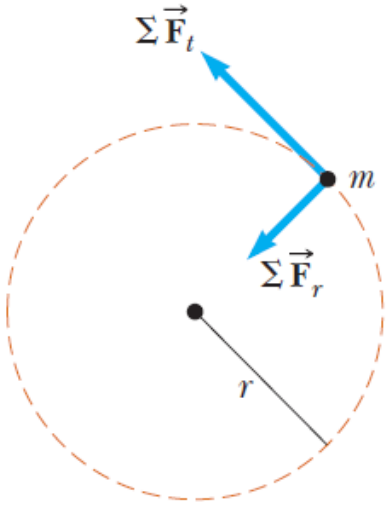


Figura 10.15 Una partícula que da vueltas en un círculo bajo la influencia de una fuerza tangencial neta $\Sigma \vec{\mathbf{F}}_t$. También debe estar presente una fuerza neta $\Sigma \vec{\mathbf{F}}_r$ en la dirección radial para mantener el movimiento circular.

$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t) r$$

$$\sum \tau = (mr\alpha) r = (mr^2)\alpha$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

El momento de torsión neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular.

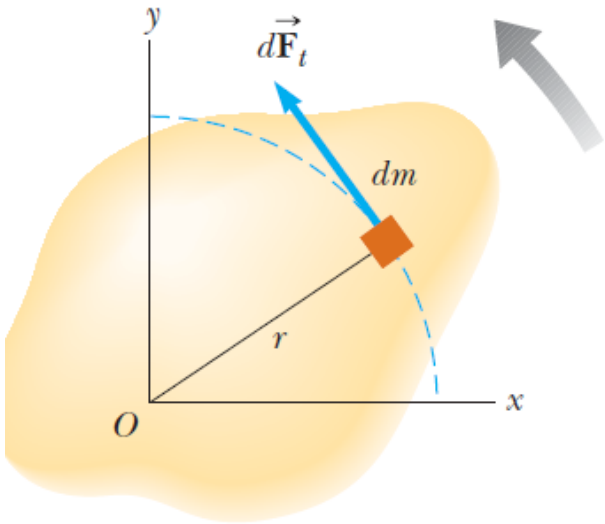


Figura 10.16 Un objeto rígido giratorio en torno a un eje a través de O. Cada elemento de masa dm da vueltas en torno al eje con la misma aceleración angular α.

EJEMPLO 10.8 Barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura 10.17. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo rígido?

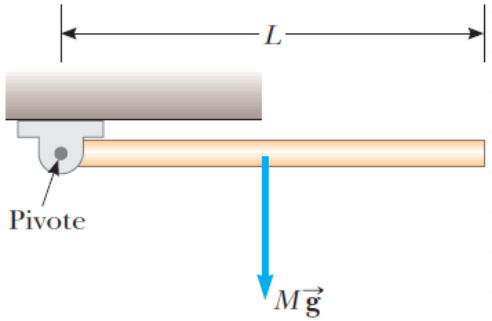


Figura 10.17 (Ejemplo 10.8) Una barra es libre de dar vuelta en torno a un pivote en el extremo izquierdo. La fuerza gravitacional sobre la barra actúa en su centro de masa.

SOLUCIÓN

Escriba una expresión para la magnitud del momento de torsión debida a la fuerza gravitacional en torno a un eje a través del pivote:

$$\tau = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

obtener la aceleración angular de la barra:

$$1) \quad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Use la ecuación 10.11 con $r = L$ para encontrar la aceleración traslacional inicial del extremo rígido de la barra:

$$a_t = L\alpha = \tfrac{3}{2}g$$

Finalizar Estos valores son los valores *iniciales* de las aceleraciones angular y traslacional. Una vez que la barra comienza a dar vuelta, la fuerza gravitacional ya no es perpendicular a la barra y los valores de las dos aceleraciones disminuyen y cambian a cero en el momento en que la barra pasa a través de la orientación vertical.

Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

El trabajo consumido en el objeto por $\vec{\mathbf{F}}$ a medida que su punto de aplicación da vueltas a través de una distancia infinitesimal $ds = r\,d\theta$ es

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (F \operatorname{sen} \phi) r\,d\theta$$

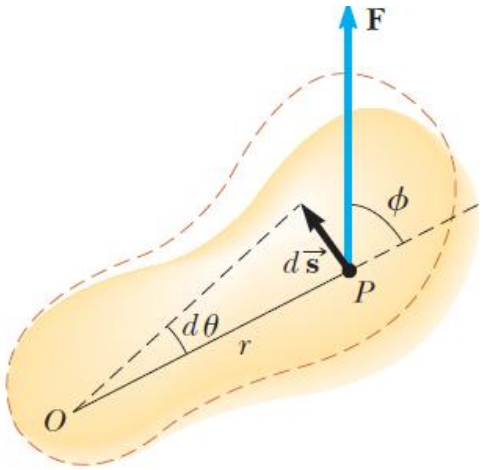


Figura 10.20 Un objeto rígido rota en torno a un eje a través de O bajo la acción de una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada a P.

el trabajo consumido por la rotación infinitesimal se puede escribir como

$$dW = \tau\,d\theta$$

La rapidez a la que $\vec{\mathbf{F}}$ realiza trabajo a medida que el objeto rota en torno al eje fijo a través del ángulo $d\theta$ en un intervalo de tiempo dt es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ya que dW/dt es la potencia instantánea $\mathcal{P}$ (vea la sección 8.5) entregada por la fuerza y $d\theta/dt = \omega$, esta expresión se reduce a

Potencia entregada a un objeto rígido en rotación ▶

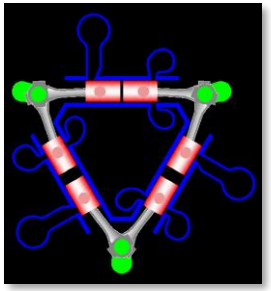
$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$

Esta ecuación es análoga a $\mathcal{P} = Fv$ en el caso del movimiento traslacional

TEOREMA TRABAJO – ENRGÍA PARA EL MOVIMIENTO ROTACIONAL

De lo aprendido del movimiento traslacional, se espera que, cuando un objeto simétrico dé vueltas en torno a un eje fijo, el trabajo invertido por fuerzas externas sea igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Para probar este hecho, comience con $\Sigma \tau = I\alpha$. Al usar la regla de la cadena del cálculo, es posible expresar el momento de torsión neto como



$$\sum \tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

Al reordenar esta expresión y notar que $\Sigma\tau\, d\theta = dW$ se obtiene

$$\sum \tau d\theta = dW = I\omega\, d\omega$$

Al integrar la expresión, se obtiene el trabajo total invertido por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema en rotativo

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}I\omega_i^{\,2}$$

donde la rapidez angular cambia de ω_i a ω_f. La ecuación 10.24 es el **teorema trabajo–energía cinética para movimiento rotacional**.

EJEMPLO 10.11 Un nuevo vistazo a la barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo (figura 10.21). La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.

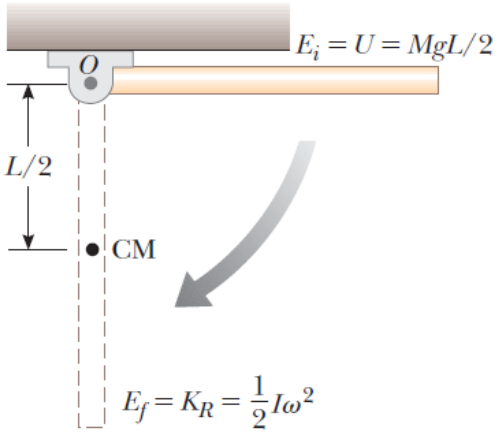


Figura 10.21 (Ejemplo 10.11) Una barra rígida uniforme con centro de giro en O da vueltas en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional.

SOLUCIÓN

A)

Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}MgL$$

Resuelva para ω y use $I = \frac{1}{3}ML^2$ (vea la tabla 10.2) para la barra:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

B)

$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

Ya que r para el punto más bajo en la barra es el doble de lo que es para el centro de masa

$$v = 2v_{CM} = \sqrt{3gL}$$

Resumen

DEFINICIONES

La **posición angular** de un objeto rígido se define como el ángulo θ entre una línea de referencia unida al objeto y una línea de referencia fija en el espacio. El **desplazamiento angular** de una partícula móvil en una trayectoria circular o un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es $\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$.

La **rapidez angular instantánea** de una partícula móvil en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \qquad (10.3)$$

La **aceleración angular instantánea** de una partícula móvil en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} \qquad (10.5)$$

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, cada parte del objeto tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.

El **momento de inercia de un sistema de partículas** se define como

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \qquad (10.15)$$

donde m_i es la masa de la i–ésima partícula y r_i es su distancia desde el eje de rotación.

La magnitud del **momento de torsión** asociado con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto a un distancia r desde el eje de rotación es

$$\tau \equiv rF\,\text{sen}\,\phi = Fd \qquad (10.19)$$

donde ϕ es el ángulo entre el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza y el vector fuerza, y d es el brazo de momento de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza.

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, la posición angular, la rapidez angular y la aceleración angular se relacionan con la posición, la rapidez y la aceleración traslacionales mediante las relaciones

$$s = r\,\theta \qquad \textbf{(10.1a)}$$

$$v_t = r\omega \qquad \textbf{(10.10)}$$

$$a_t = r\alpha \qquad \textbf{(10.11)}$$

Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo con rapidez angular ω, su **energía cinética rotacional** se puede escribir

$$K_R = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \qquad \textbf{(10.16)}$$

donde I es el momento de inercia en torno al eje de rotación.

El **momento de inercia de un objeto rígido** es

$$I = \int r^2\, dm \qquad \textbf{(10.17)}$$

donde r es la distancia desde el elemento de masa dm hasta el eje de rotación.

La rapidez a la que una fuerza externa realiza trabajo para girar un objeto rígido en torno a un eje fijo, o la **potencia** entregada, es

$$\mathcal{P} = \tau\omega \qquad \textbf{(10.23)}$$

Si sobre un objeto rígido se consume trabajo y el único resultado del trabajo es rotación en torno a un eje fijo, el trabajo neto consumido por las fuerzas externas para girar el objeto es igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto:

$$\sum W = \tfrac{1}{2} I\omega_f^{\,2} - \tfrac{1}{2} I\omega_i^{\,2} \qquad \textbf{(10.24)}$$

La **energía cinética total** de un objeto rígido que rueda sobre una superficie rugosa sin deslizamiento es igual a la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa más la energía cinética traslacional del centro de masa:

$$K = \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}}\omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^{\,2} \qquad \textbf{(10.28)}$$

Cantidad de movimiento angular

La cantidad de **movimiento angular** instantánea $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula en relación con un eje a través del origen O se define mediante el producto cruz del vector de posición instantáneo de la partícula $\vec{\mathbf{r}}$ y su cantidad de movimiento lineal instantánea $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$

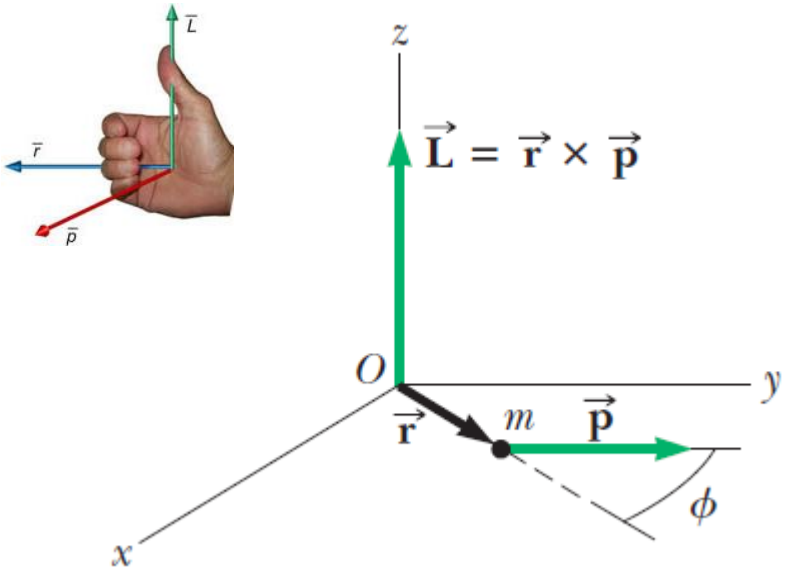


Figura 11.4 La cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula con cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ ubicada en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ es un vector conocido por $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$. El valor de $\vec{\mathbf{L}}$ depende del eje en torno al que se mida y es un vector perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{r}}$ como a $\vec{\mathbf{p}}$.

La unidad del **SI** de la cantidad de movimiento angular es $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

EJEMPLO 11.3 Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular

Una partícula se mueve en el plano *xy* en una trayectoria circular de radio *r*, como se muestra en la figura 11.5. Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular en relación con un eje a través de *O* cuando su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}$.

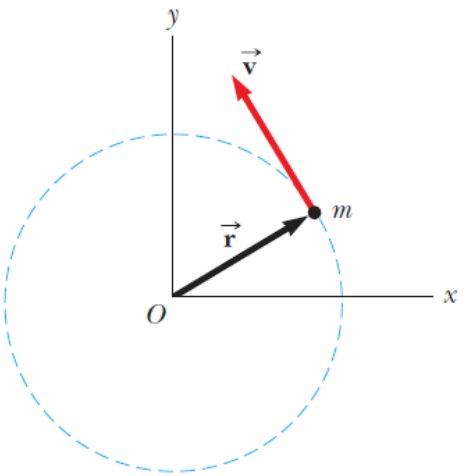


Figura 11.5 (Ejemplo 11.3) Una partícula móvil en un círculo de radio *r* tiene una cantidad de movimiento angular en torno a un eje a través de *O* que tiene magnitud *mvr*. El vector $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ apunta hacia *afuera* de la página.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La cantidad de movimiento lineal de la partícula cambia en dirección (pero no en magnitud). Por lo tanto, debe estar tentado a concluir que la cantidad de movimiento angular de la partícula siempre cambia. Sin embargo, en esta situación, este no es el caso. Vea por qué.

Categorizar Use la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula explicada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 11.12 para evaluar la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$:

$$L = mvr \operatorname{sen} 90^\circ = mvr$$

Este valor de *L* es constante porque los tres factores a la derecha son constantes. La dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ también es constante, aun cuando la dirección de $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ siga cambiando. Para verificar esta afirmación, aplique la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$ en la figura 11.5. Su pulgar apunta hacia arriba y se aleja de la página, así que esta es la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$. En consecuencia, se puede escribir la expresión vectorial $\vec{\mathbf{L}} = (mvr)\hat{\mathbf{k}}$. Si la partícula se moviera en sentido de las manecillas del reloj, $\vec{\mathbf{L}}$ apuntaría hacia abajo y adentro de la página y $\vec{\mathbf{L}} = -(mvr)\hat{\mathbf{k}}$. **Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento angular constante en torno a un eje a través del centro de su trayectoria.**

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

La derivación de esta ecuación respecto al tiempo produce

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i$$

se puede escribir como

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} \qquad \vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

esta ecuación es el análogo rotacional de $\Sigma\, \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = d\vec{\mathbf{p}}_{tot}/\, dt$

Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio

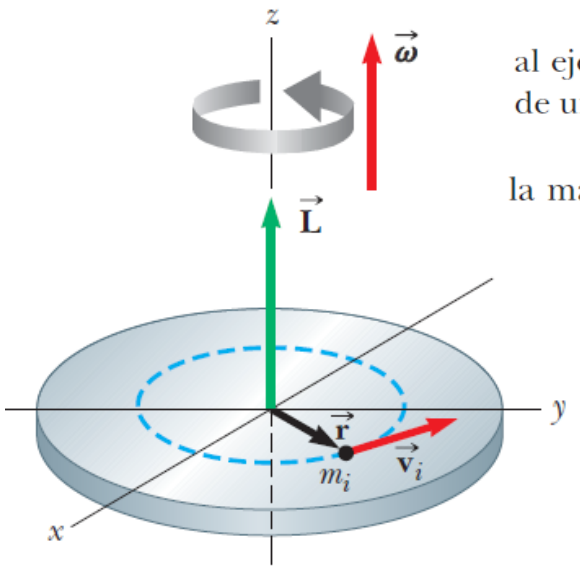


Figura 11.7 Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje, la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ está en la misma dirección que la velocidad angular $\vec{\omega}$, de acuerdo con la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Cada *partícula* del objeto da vueltas en el plano xy en torno al eje z con una rapidez angular ω. La magnitud de la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m_i en torno al eje z es $m_i v_i r_i$.

la magnitud de la cantidad de movimiento angular de esta partícula se expresa como

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$L_z = I\omega$$

Ahora derive la ecuación respecto al tiempo, y note que I es constante para un objeto rígido:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Ya que dL_z/dt es igual al momento de torsión externo neto

Forma rotacional de la segunda ley de Newton ▶ $\sum \tau_{ext} = I\alpha$

El sistema aislado: conservación de cantidad de movimiento angular

La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado.

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = 0$$

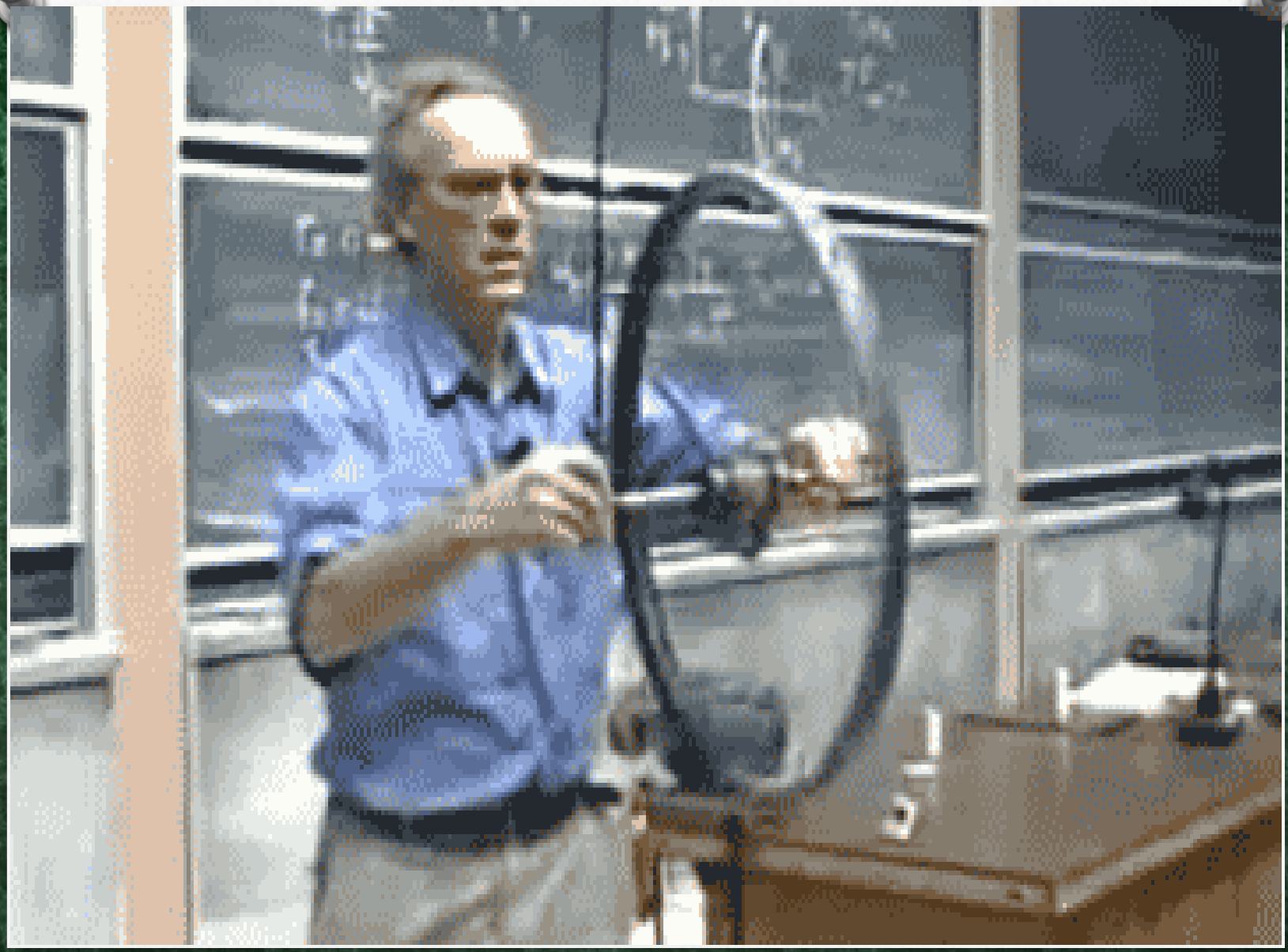
por lo tanto

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{o} \quad \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$$

Por lo tanto, un cambio en I para un sistema aislado requiere un cambio en ω. En este caso, el principio de conservación de cantidad de movimiento angular se expresa como

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante}$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR



EJEMPLO 11.5 Bola de boliche

Estime la magnitud de la cantidad de movimiento angular de una bola de boliche que gira a 10 rev/s, como se muestra en la figura.

Una bola de boliche representativa puede tener una masa de 7.0 kg y un radio de 12 cm.

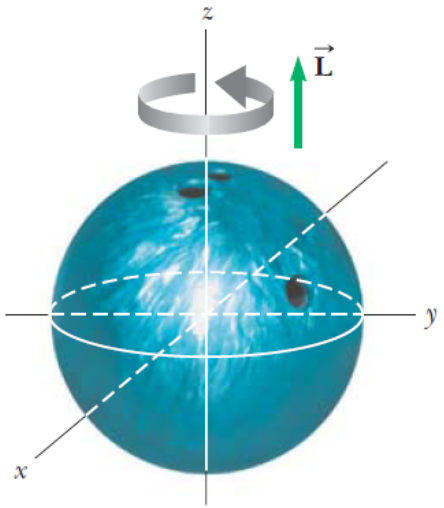
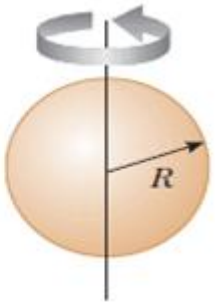


Figura 11.8 (Ejemplo 11.5) Una bola de boliche que da vueltas en torno al eje z en la dirección que se muestra tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ en la dirección z positiva. Si la dirección de rotación se invierte, $\vec{\mathbf{L}}$ apunta en la dirección z negativa.

Esfera sólida

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$$



SOLUCIÓN

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(7.0\text{ kg})(0.12\text{ m})^2 = 0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Evalúe la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la ecuación 11.14:

$$L_z = I\omega = (0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(10\text{ rev/s})(2\pi\text{ rad/rev}) = 2.53\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Debido a lo burdo de las estimaciones, sólo se debe conservar una cifra significativa, así que $L_z =$ $3\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

Resumen

DEFINICIONES

Conocidos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector $\vec{C}$ que tiene una magnitud

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \qquad (11.3)$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

El momento de torsión $\vec{\tau}$ debido a una fuerza $\vec{F}$ en torno a un eje a través del origen en un marco inercial se define como

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \qquad (11.1)$$

La **cantidad de movimiento angular** $\vec{L}$ de una partícula que tiene cantidad de movimiento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ en torno a un eje a través del origen es

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \qquad (11.10)$$

donde $\vec{r}$ es la posición vectorial de la partícula en relación con el origen.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La componente z de la cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje z fijo es

$$L_z = I\omega \qquad (11.14)$$

donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación y ω es su rapidez angular.

Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y traslacional

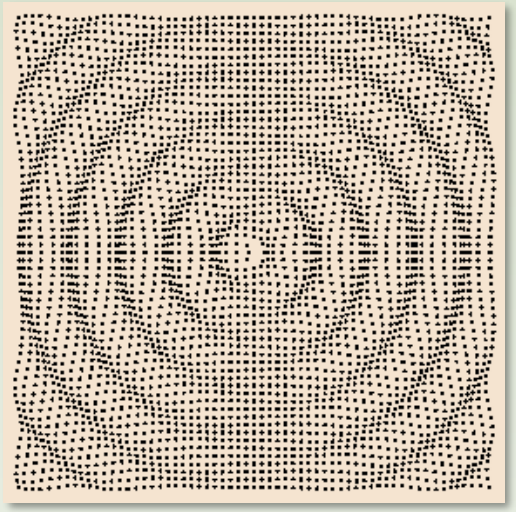
Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
Rapidez angular $\omega = d\theta/dt$	Rapidez traslacional $v = dx/dt$
Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	Aceleración traslacional $a = dv/dt$
Momento de torsión neto $\Sigma\tau = I\alpha$	Fuerza neta $\Sigma F = ma$
Si α = constante $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Si a = constante $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Trabajo $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$	Trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$
Energía cinética rotacional $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia $\mathcal{P} = \tau\omega$	Potencia $\mathcal{P} = Fv$
Cantidad de movimiento angular $L = I\omega$	Cantidad de movimiento lineal $p = mv$
Momento de torsión neto $\Sigma\tau = dL/dt$	Fuerza neta $\Sigma F = dp/dt$

FIN

Periodo 4

MECÁNICA VECTORIAL

OSCILACIONES Y ONDAS



Física + Matemáticas en Acción

Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

Contenidos

DECLARATIVOS

MOVIMIENTO OSCILATORIO

1. Cinemática y dinámica del oscilador armónico simple.
2. Péndulos simple y compuesto.
3. Superposición de dos movimientos armónicos simples (coherencia e incoherencia).
4. Terminología: concepto de onda; periodo y frecuencia de oscilación; amplitud; fase; longitud de onda.
5. Ondas sonoras: ondas estacionarias; velocidad del sonido en distintos medios; intensidad de una onda sonora; nivel de sonido y potencia acústica (decibeles). El oído y la percepción del sonido:.
6. Fenómenos acústicos: absorción; reflexión; difracción; refracción; difusión; efecto Doppler; interferencia; resonancia (oscilación “en fase” y “fuera de fase”).

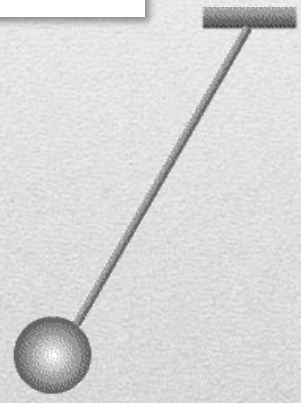
Es importante mencionar que los temas se cubrirán de manera completa más no exhaustiva.

Curso de Mecánica Vectorial

OSCILACIONES Y ONDAS MECÁNICAS

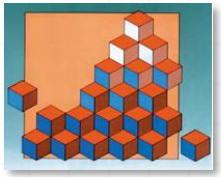
- Movimiento oscilatorio
- Movimiento ondulatorio
- Ondas sonoras
- Sobreposición y ondas estacionarias

- Movimiento de un objeto unido a un resorte
- Partícula en movimiento armónico simple
- Energía del oscilador armónico simple
- El péndulo
- Oscilaciones amortiguadas
- Oscilaciones forzadas



En los edificios altos para reducir el bamboleo debido al viento, se colocan amortiguadores ajustados a resonancia cerca de lo alto del edificio. Estos mecanismos incluyen un objeto de gran masa que oscila bajo control de computadora con la misma frecuencia que los edificios, lo que reduce el bamboleo. La gran esfera, en la fotografía de la izquierda, es parte del sistema amortiguador ajustado a resonancia del edificio, en la fotografía de la derecha, llamado Taipei 101, en Taiwán.

Objetivos de la Lección



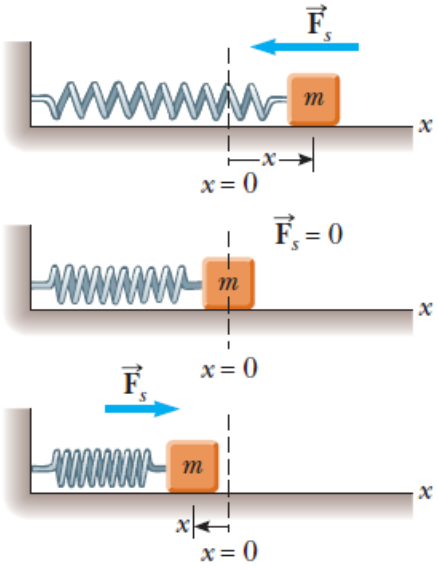
Al terminar esta lección el alumno será capaz de:

- *Describir el movimiento de un objeto unido a un resorte.*
- *Distinguir el movimiento armónico simple.*
- *Identificar los diferentes tipos de oscilaciones.*
- *Calcular la energía de un oscilador.*

Movimiento oscilatorio

Una clase especial de movimiento periódico se presenta en sistemas mecánicos cuando la fuerza que actúa en un objeto es proporcional a la posición del objeto relativo con alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza siempre se dirige hacia la posición de equilibrio, el movimiento se llama *movimiento armónico simple*.

$F_s = -kx$ ◀ Ley de Hooke

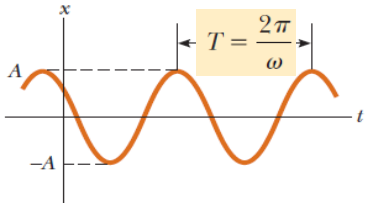


Partícula en movimiento armónico simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Si la relación k/m se indica con el símbolo ω^2 (se elige ω^2 en lugar de ω para que la solución que se desarrolle a continuación sea más simple en forma), en tal caso

frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



y la ecuación se puede escribir en la forma $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

una solución a la ecuación diferencial:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

EJEMPLO 15.1 Un sistema bloque–resorte

Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero tiene una constante de fuerza de 5.00 N/m y es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera del reposo como en la figura 15.6.

A) Hallar el periodo de su movimiento.

B) Determine la rapidez máxima del bloque.

C) ¿Cuál es la máxima aceleración del bloque?

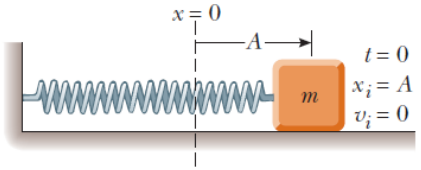


Figura 15.6 Un sistema bloque–resorte que inicia su movimiento desde el reposo con el bloque en $x = A$ en $t = 0$. En este caso, $\phi = 0$; por lo tanto, $x = A \cos \omega t$.

SOLUCIÓN

A)
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00\ \text{N/m}}{200 \times 10^{-3}\ \text{kg}}} = 5.00\ \text{rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00\ \text{rad/s}} = 1.26\ \text{s}$$

B)
$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00\ \text{rad/s})(5.00 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 0.250\ \text{m/s}$$

C)
$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00\ \text{rad/s})^2(5.00 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 1.25\ \text{m/s}^2$$

EJEMPLO 15.2 ¡Cuidado con los baches!

Un automóvil con una masa de 1 300 kg se construye de modo que su chasis está sostenido mediante cuatro amortiguadores. Cada amortiguador tiene una constante de fuerza de 20 000 N/m. Dos personas que viajan en el automóvil tienen una masa combinada de 160 kg. Encuentre la frecuencia de vibración del automóvil después de que pasa sobre un bache en el camino.

SOLUCIÓN

Encuentre una expresión para la fuerza total sobre el automóvil:

$$F_{\text{total}} = \sum (-kx) = -\left(\sum k\right)x$$

En esta expresión, x se factorizó de la suma porque es la misma para los cuatro amortiguadores. La constante de resorte efectiva para los amortiguadores combinados es la suma de las constantes del amortiguador individual.

Evalúe la constante de resorte efectiva:

$$k_{\text{ef}} = \sum k = 4 \times 20\,000 \text{ N/m} = 80\,000 \text{ N/m}$$

Use la ecuación 15.14 para encontrar la frecuencia de vibración:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{ef}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80\,000 \text{ N/m}}{1\,460 \text{ kg}}} = 1.18 \text{ Hz}$$

Energía del oscilador armónico simple

Energía cinética de un oscilador armónico simple ▶

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$$

Energía potencial de un oscilador armónico simple ▶

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

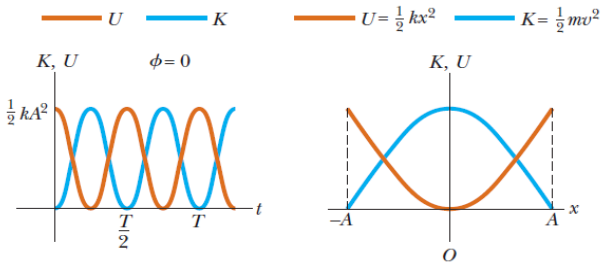
Se ve que K y U *siempre* son cantidades positivas o cero. Puesto que $\omega^2 = k/m$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa como

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2[\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

A partir de la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se ve que la cantidad entre corchetes es la unidad. En consecuencia, esta ecuación se reduce a

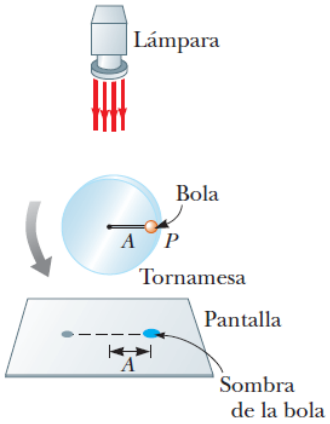
Energía total de un oscilador armónico simple ▶

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$



Esto es: **la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y es proporcional al cuadrado de la amplitud.**

Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

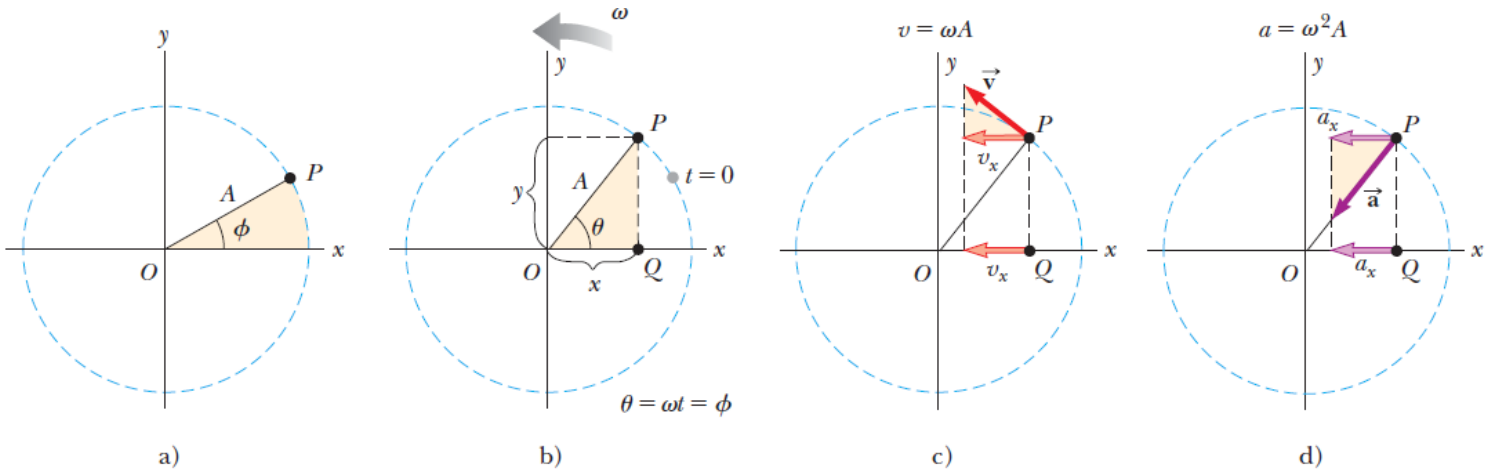


Figura 15.14 Correspondencia entre el movimiento circular uniforme de un punto P y el movimiento armónico simple de un punto Q. Una partícula en P se mueve en un círculo de radio A con rapidez angular constante ω. a) Un círculo de referencia que muestra la posición de P en $t = 0$. b) Las coordenadas x de los puntos P y Q son iguales y varían en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = A\cos(\omega t + \phi)$. c) La componente x de la velocidad de P es igual a la velocidad de Q. d) La componente x de la aceleración de P es igual a la aceleración de Q.

EJEMPLO 15.4 Movimiento circular con rapidez angular constante

Una partícula da vueltas en contra las manecillas del reloj en un círculo de 3.00 m de radio, con una rapidez angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$, la partícula tiene una coordenada x de 2.00 m y se mueve hacia la derecha.

A) Determine la coordenada x de la partícula como función del tiempo.

B) Encuentre las componentes x de velocidad y aceleración de la partícula en cualquier tiempo t.

SOLUCIÓN

A) **Analizar** Use la ecuación 15.23 para escribir una expresión para la coordenada x de la partícula en rotación con $\omega = 8.00$ rad/s:

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = (3.00\text{ m})\cos(8.00t + \phi)$$

Evalúe ϕ, use la condición inicial $x = 2.00$ m en $t = 0$:

$$2.00\text{ m} = (3.00\text{ m})\cos(0 + \phi)$$

Resuelva para ϕ:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00\text{ m}}{3.00\text{ m}}\right) = \cos^{-1}(0.667) = \pm 48.2^\circ = \pm 0.841\text{ rad}$$

Si se considera $\phi = +0.841$ rad como la respuesta, la partícula es móvil hacia la izquierda en $t = 0$. Ya que la partícula se mueve hacia la derecha en $t = 0$, se debe elegir $\phi = -0.841$ rad.

Escriba la coordenada x como función del tiempo:

$$x = (3.00\text{ m})\cos(8.00t - 0.841)$$

B) Derivando la coordenada x respecto al tiempo para encontrar la velocidad en cualquier tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00\text{ m})(8.00\text{ rad/s})\,\text{sen}\,(8.00t - 0.841)$$
$$= -(24.0\text{ m/s})\,\text{sen}\,(8.00t - 0.841)$$

Derivando la velocidad respecto al tiempo para encontrar la aceleración en cualquier tiempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-24.0\text{ m/s})(8.00\text{ rad/s})\cos(8.00t - 0.841)$$
$$= -(192\text{ m/s}^2)\cos(8.00t - 0.841)$$

El péndulo

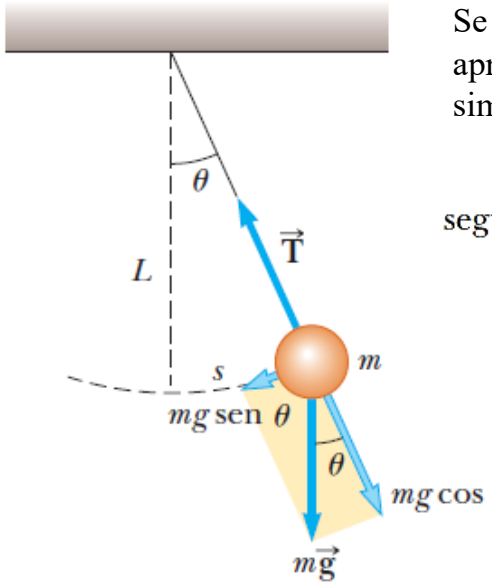


Figura 15.16 La fuerza restauradora es $-mg \operatorname{sen} \theta$, la componente de la fuerza gravitacional tangente al arco. Cuando θ es pequeño, un péndulo simple oscila en movimiento armónico simple en torno a la posición de equilibrio $\theta = 0$.

Se puede demostrar que, siempre que el ángulo θ sea pequeño (menor que aproximadamente 10°), el movimiento es muy cercano al de un oscilador armónico simple.

La componente tangencial es una fuerza restauradora y se puede aplicar la segunda ley de Newton del movimiento en la dirección tangencial:

$$F_t = -mg \operatorname{sen} \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ya que $s = L\theta$ y L es constante, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta$$

En tanto θ sea menor que aproximadamente 10°, el ángulo en radianes y su seno son los mismos hasta dentro de una precisión menor de 1.0 por ciento. Por lo tanto, para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad \text{(para valores pequeños de } \theta\text{)}$$

la solución de la ecuación $\theta = \theta_{máx} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{máx}$ es la *posición angular máxima* y la frecuencia angular ω es $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ ◀ Frecuencia angular para un péndulo simple

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

EJEMPLO 15.6 Una barra que se balancea

Una barra uniforme de masa M y longitud L se articula en torno a un extremo y oscila en un plano vertical (figura 15.18). Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

SOLUCIÓN

Analizar se encontró que el momento de inercia de una barra uniforme en torno a un eje a través de un extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. La distancia d desde el eje al centro de masa de la barra es $L/2$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

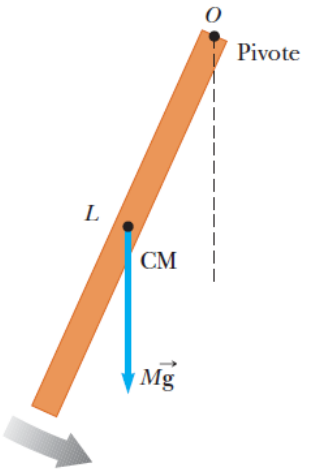


Figura 15.18 (Ejemplo 15.6) Una barra rígida que oscila en torno a un eje a través de un extremo es un péndulo físico con $d = L/2$ y, de la tabla 10.2, $\frac{1}{3}ML^2$.

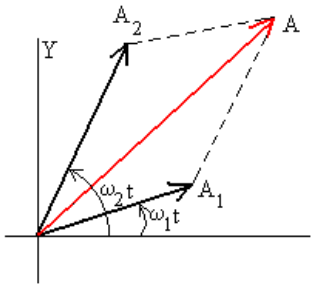
Composición de dos M.A.S. de la misma dirección y frecuencia

Supongamos dos MAS de distinta frecuencia angular y con la misma fase inicial

$x_1=A_1\cdot\text{sen}(\omega_1\cdot t)$
$x_2=A_2\cdot\text{sen}(\omega_2\cdot t)$

De acuerdo con la interpretación geométrica de un MAS.

- El primer MAS es la proyección sobre el eje X de un vector de longitud A_1 que gira con velocidad angular ω_1.
- El segundo MAS es la proyección sobre el eje X de un vector de longitud A_2 que gira con velocidad angular ω_2.
- El MAS resultante es la proyección sobre el eje X del vector suma vectorial de los dos vectores.



De forma vectorial lo expresamos como

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$

El módulo del vector resultante no tiene una longitud constante

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t}$$

su valor máximo es A_1+A_2 y su valor mínimo es $|A_1-A_2|$. Se dice entonces que la amplitud es modulada.

Cuando las amplitudes $A_1=A_2$ podemos expresar de forma más simple el MAS resultante

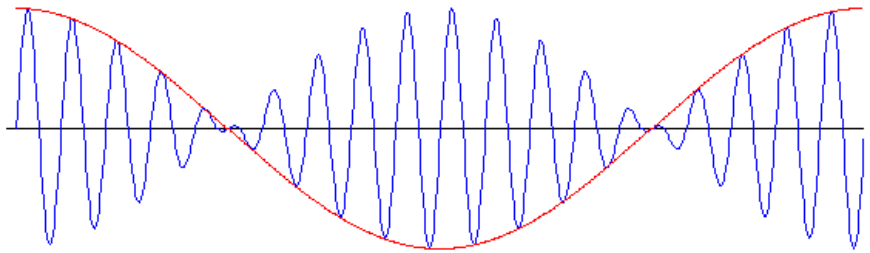
$x= x_1+ x_2=A_1\cdot\text{sen}(\omega_1\cdot t)+A_1\cdot\text{sen}(\omega_2\cdot t)$

$$\boxed{x = 2A_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\cdot\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t}$$

Esta ecuación nos dice que se trata de un MAS de frecuencia angular $(\omega_1+\omega_2)/2$ y de amplitud

$$A = 2A_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$$

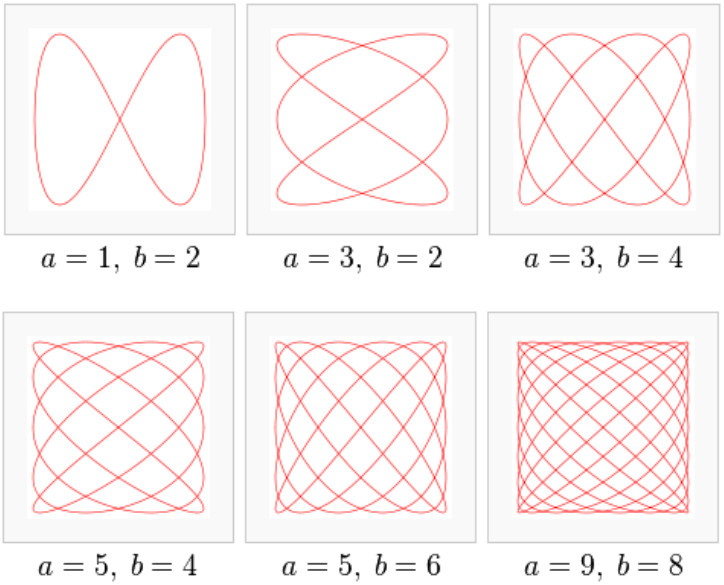
En la figura, en color rojo se muestra la amplitud modulada A y en color azul el resultado x de la composición de los dos MAS.

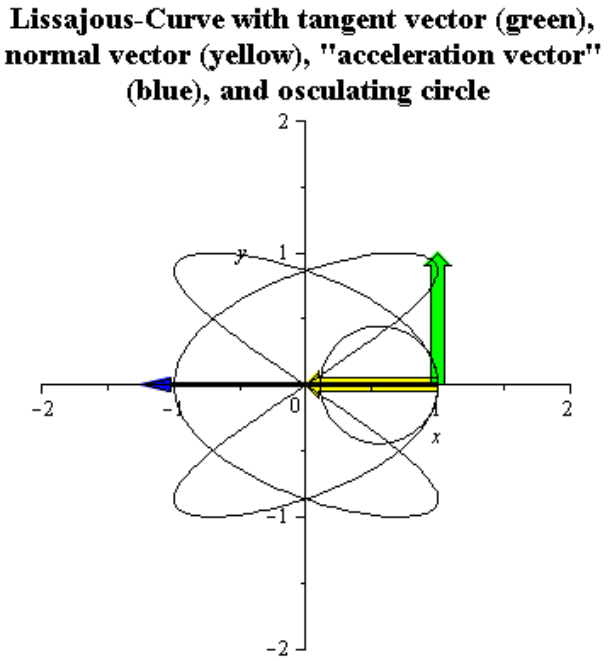


Curva de Lissajous

En matemáticas, la curva de Lissajous, también conocida como figura de Lissajous o curva de Bowditch, es la gráfica del sistema de ecuaciones paramétricas correspondiente a la superposición de dos movimientos armónicos simples en direcciones perpendiculares:

$$x = A\sin(\omega_x t + \alpha), \quad y = B\sin(\omega_y t + \beta), \quad \delta = \alpha - \beta$$



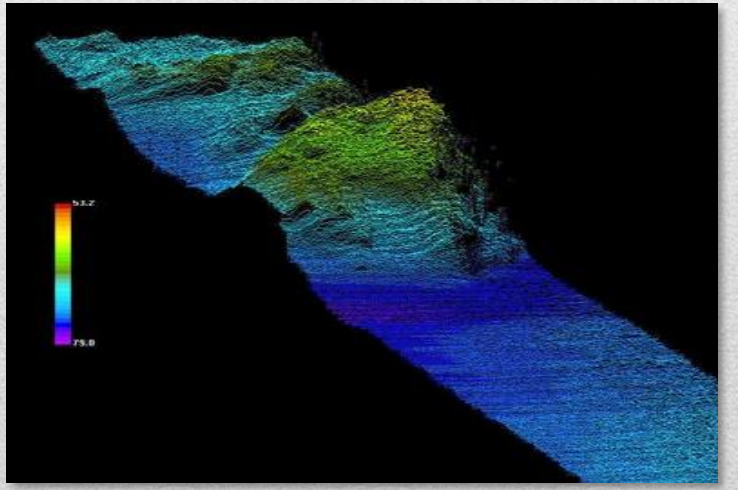


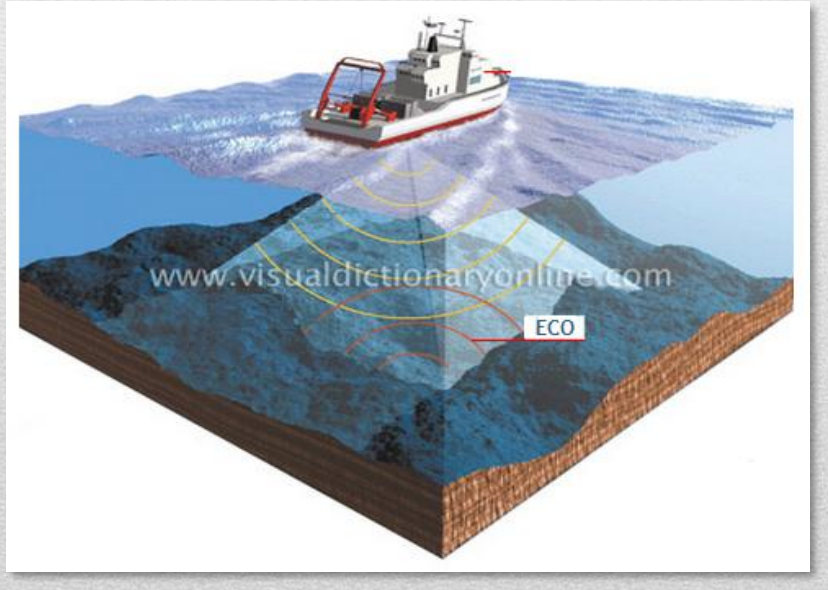
Curso de Mecánica Vectorial

OSCILACIONES Y ONDAS MECÁNICAS

- Movimiento oscilatorio
- Movimiento ondulatorio
- Ondas sonoras
- Sobreposición y ondas estacionarias

- Propagación de una perturbación
- El modelo de onda progresiva
- La rapidez de ondas en cuerdas
- Reflexión y transmisión
- Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales en cuerdas
- La ecuación de onda lineal

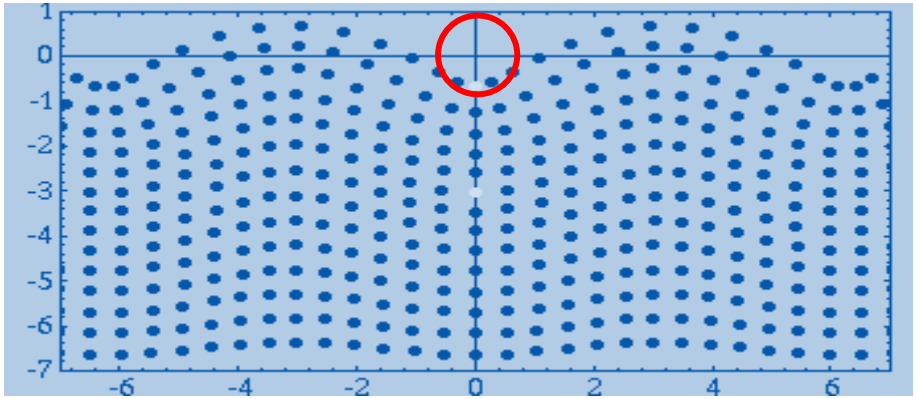


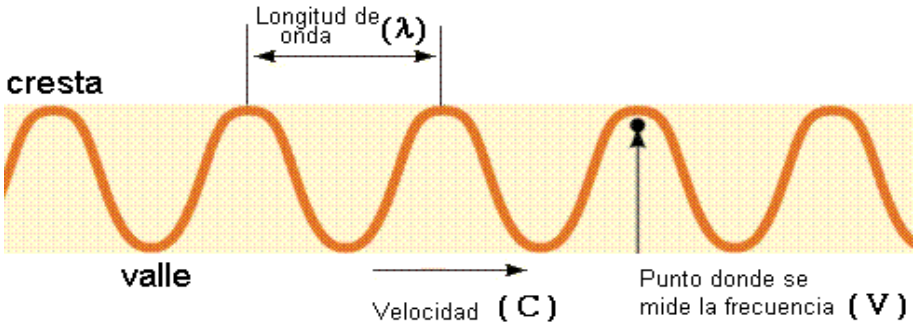


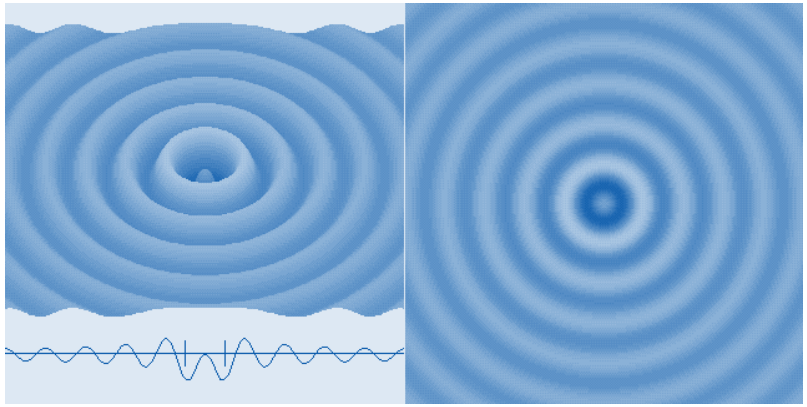
Movimiento ondulatorio

Una onda transporta energía pero no transporta materia.

Las partículas vibran alrededor de la posición de equilibrio pero no viajan con la perturbación.

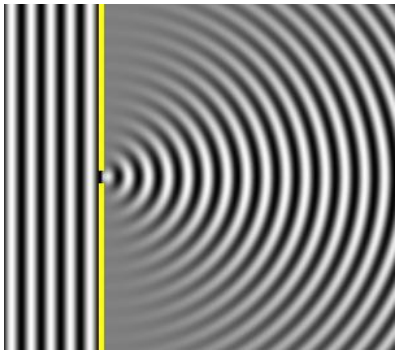






Movimiento ondulatorio

Las ondas pueden ser unidimensionales bidimensionales y tridimensionales según se propaguen en una sola dirección, en un plano o en las tres dimensiones del espacio.

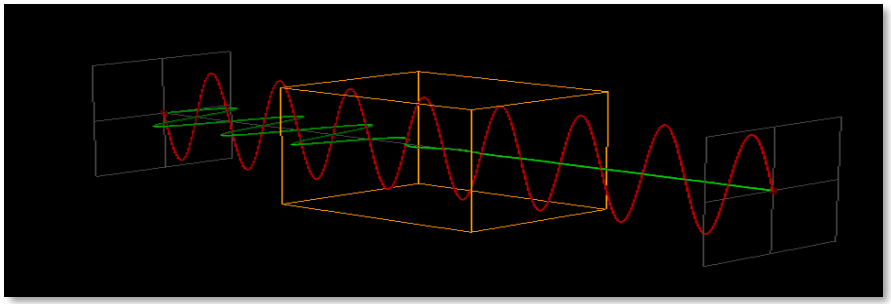


- **Unidimensional:** Onda transversal en una cuerda.
- **Bidimensional:** Olas concéntricas en la superficie de un estanque.
- **Tridimensional:** El sonido en el aire.

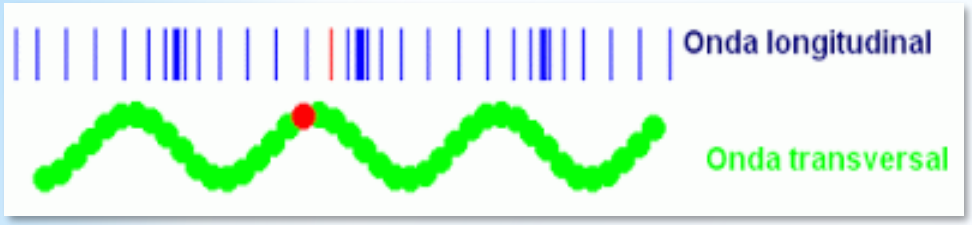
Además las ondas se dividen en materiales o mecánicas y electromagnéticas, la diferencia principal es que las ondas mecánicas necesitan un medio material para propagarse mientras las ondas electromagnéticas, como la luz, viajan por el espacio-tiempo.

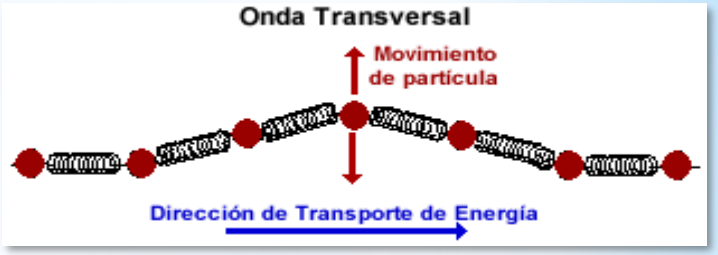
"Olas"
Onda plana en el mar

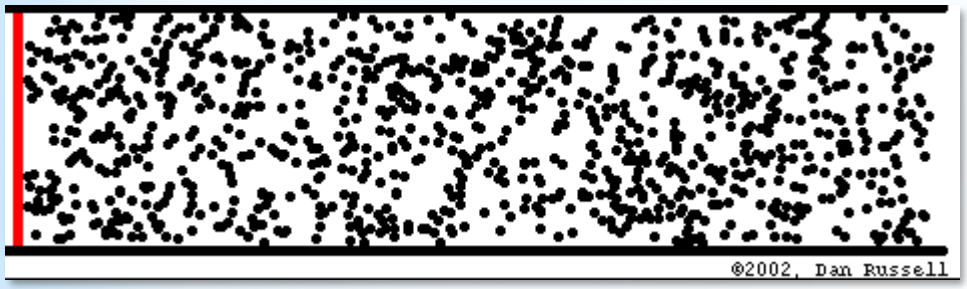
Representación de una onda electro-magnética.

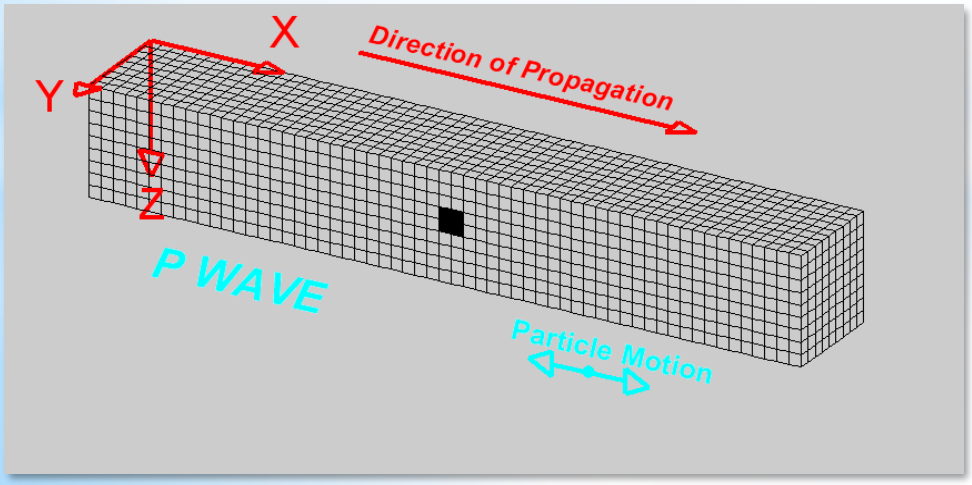


Tipos de Ondas



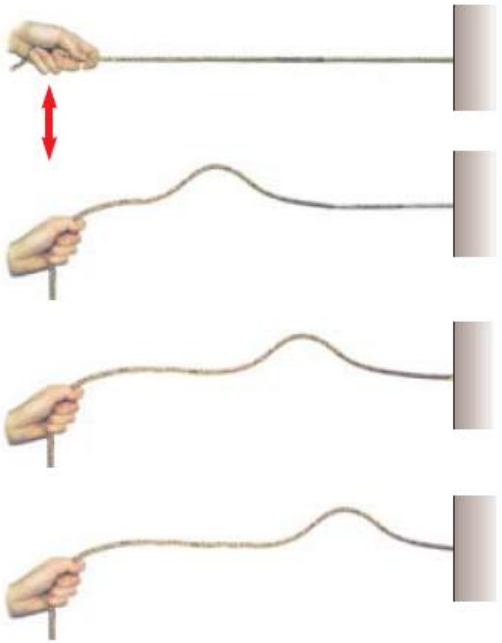




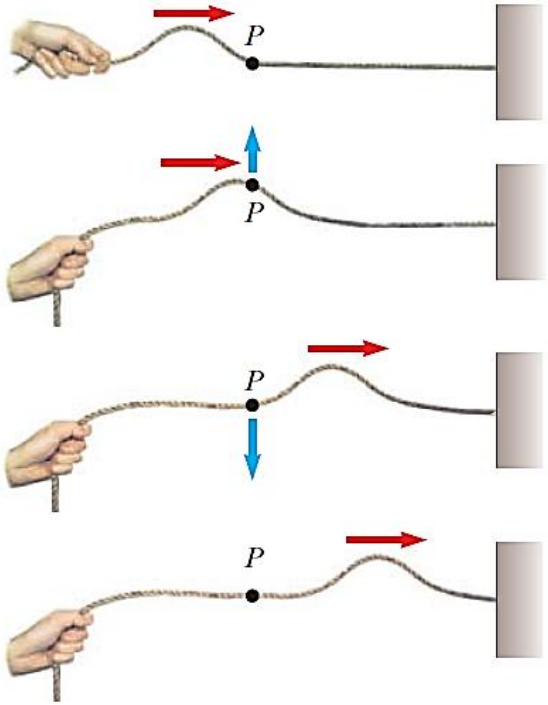


Propagación de una perturbación

Todas las ondas mecánicas requieren 1) alguna fuente de perturbación, 2) un medio que contenga elementos que sean factibles de perturbación y 3) algún mecanismo físico a partir del cual los elementos del medio puedan influirse mutuamente.



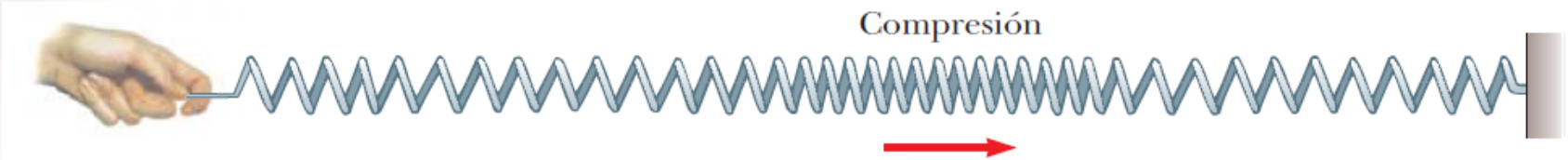
Un pulso viaja por una cuerda estirada. La forma del pulso es aproximadamente invariable mientras viaja a lo largo de la cuerda.



Un pulso transversal viaja sobre una cuerda estirada. La dirección de movimiento de cualquier elemento *P* de la cuerda (flechas azules) es perpendicular a la dirección de propagación (flechas rojas).

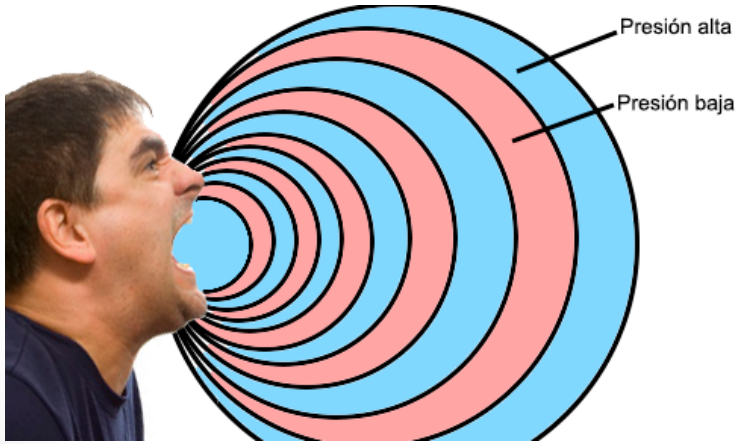
En realidad, el pulso cambia de forma y gradualmente se dispersa durante el movimiento. Este efecto, llamado *dispersión*, es común a muchas ondas mecánicas, así como a ondas electromagnéticas.

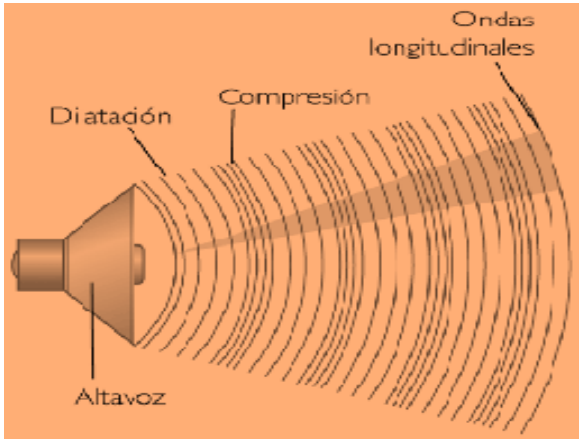
Propagación de una perturbación



Un pulso longitudinal a lo largo de un resorte estirado. El desplazamiento de las espiras es paralelo a la dirección de la propagación.

Las ondas sonoras, que se explicaran más adelante, son otro ejemplo de ondas longitudinales.
La perturbación en una onda sonora es una serie de regiones de alta y baja presiones que viajan en el aire.



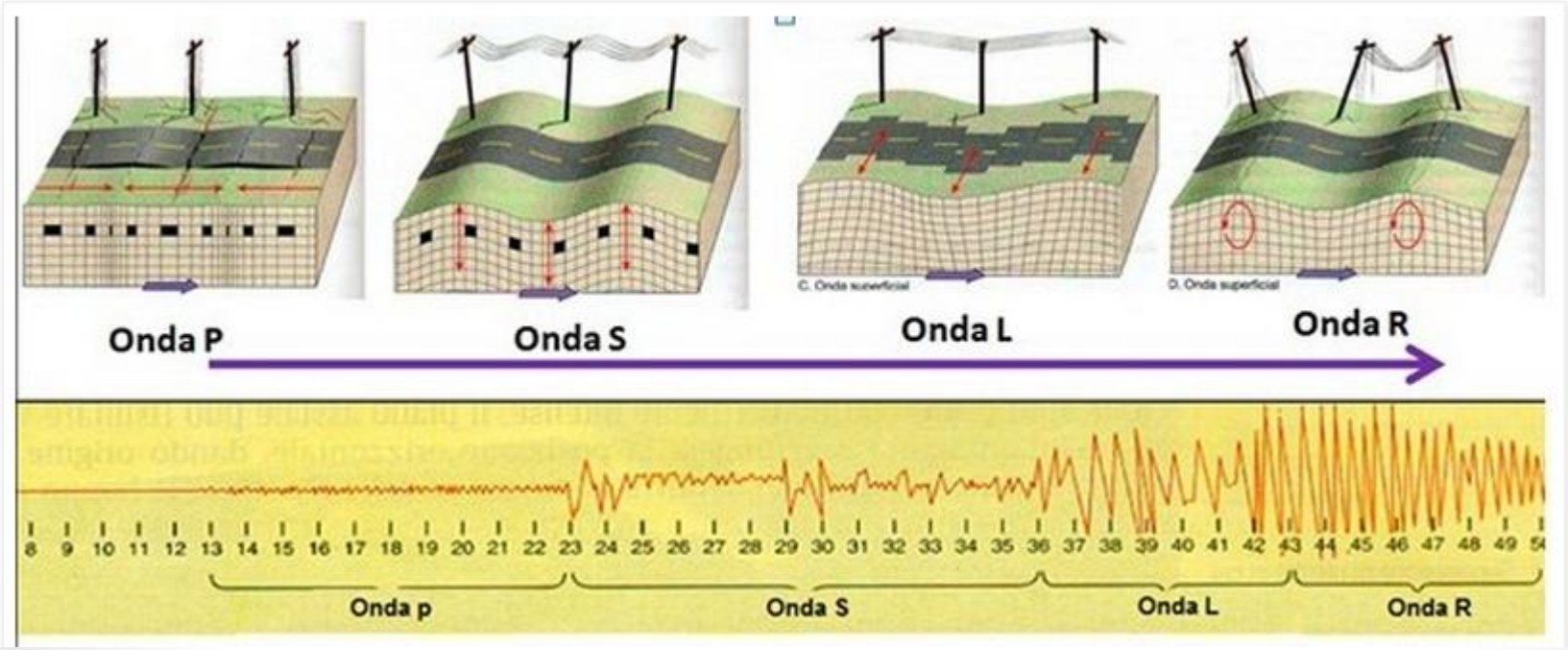


¿Como actúan las ondas sísmicas en un Terremoto?

Las ondas tridimensionales que viajan desde un punto abajo de la superficie de la Tierra donde se presenta un terremoto, son de ambos tipos, transversales y longitudinales. Las ondas longitudinales son las mas rápidas de las dos y viajan con magnitudes de velocidad en el intervalo de 7 a 8 km/s cerca de la superficie.

Se llaman **ondas P**, donde "P" es por *primarias*, porque viajan mas rápido que las ondas transversales y llegan primero a un sismógrafo (el dispositivo que se usa para detectar ondas debidas a terremotos).

Las ondas transversales mas lentas, llamadas **ondas S**, donde "S" es para *secundarias*, viajan a través de la Tierra a 4 o 5 km/s cerca de la superficie.



¿Como actúan las ondas sísmicas en un Terremoto?

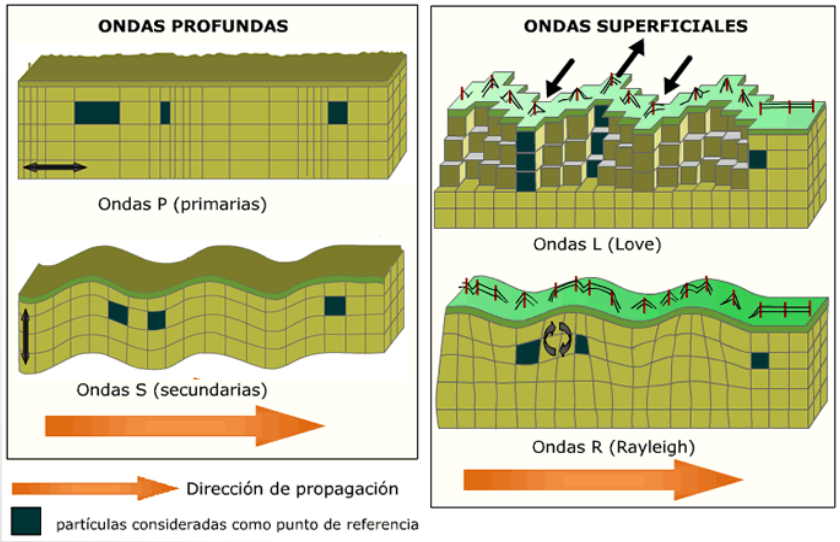
Las ondas Love, conocidas como L, estas son mucho más fuetes y son destructoras, tiene una características de ser perpendiculares la ondas P y se perciben como una fuerza nos da la sensación de que se abren los pies, esta ondas es la responsable de las aperturas de tierra o creadoras de zanjas.

Estas son malas, causan daños, son las terceras en llegar.

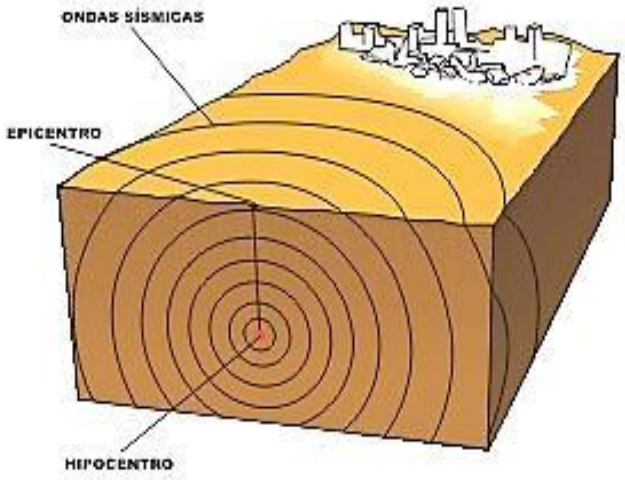
Las ondas Rayleigh, conocida como R, que son las más destructoras y más lentas, y se perciben como ondas de carácter circular en la vertical, tienden expulsar los objetos y personas hacia delante, con la tendencia de rodar en la superficie, como ola de mar.

Estas son las destructoras, las que matan.

El máximo daño se produce, cuando todas los tipos de ondas se juntan y se potencian entrando en resonancia

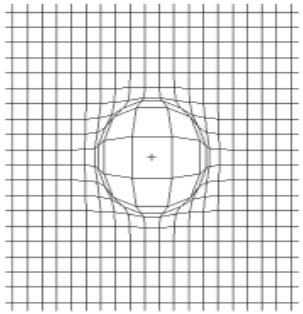


¿Como actúan las ondas sísmicas en un Terremoto?

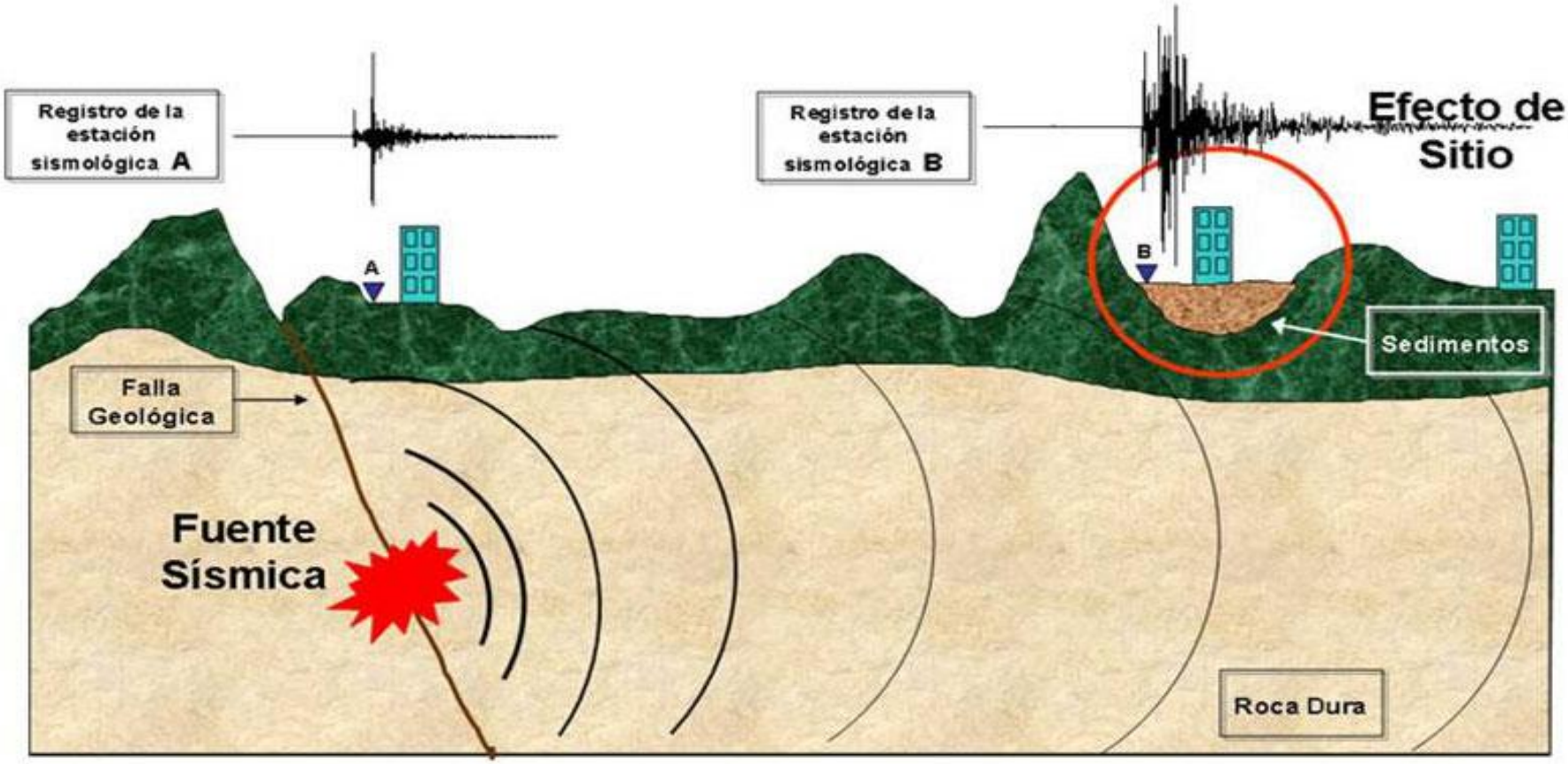


Al registrar en un sismógrafo el intervalo de tiempo entre las llegadas los tipos de ondas P y S, se determina la distancia desde el sismógrafo al punto de origen de las ondas.

Una sola medición establece una esfera imaginaria con centro en el sismógrafo, donde el radio de la esfera se determina mediante la diferencia en los tiempos de llegada de las ondas P y S.



EL MOVIMIENTO DEL SUELO DEPENDE DE :
Fuente + Trayectoria + Sitio



El origen de las ondas se ubica en alguna parte sobre las esferas de medición.

Las esferas imaginarias desde tres o mas estaciones de monitoreo, ubicadas muy separadas unas de otras, se intersecan en una región de la Tierra, y esta región es donde se presento el terremoto.

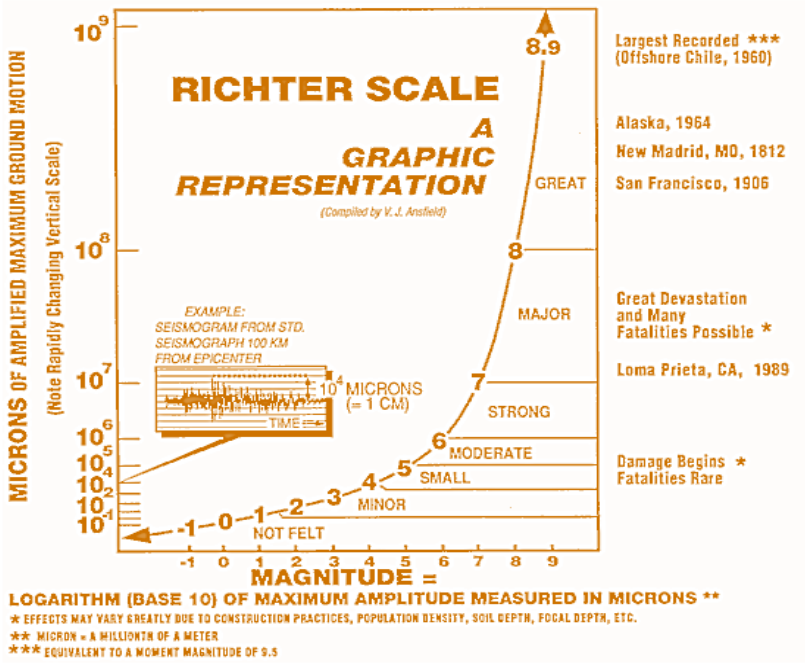
Escalas Sísmicas

ESCALA RICHTER

La escala Richter fue desarrollada por el americano Charles F. Ritcher en los años 30.

Charles F. Richter (1900-1985)

Magnitud	Efectos probables
1	Detectable sólo por los instrumentos
2-3	Ligeramente por las personas
4-5	Detectable a 32 km del epicentro. Posibles daños ligeros en un área pequeña.
6	Bastante destructivo
7	Terremoto importante
8	Terremoto muy destructivo



Representa la energía sísmica liberada en cada terremoto y se basa en el registro sismográfico. Es una escala que crece en forma potencial o semilogarítmica, de manera que cada punto de aumento puede significar un aumento diez o más veces mayor de la magnitud de las ondas (vibración de la tierra), pero la energía liberada aumenta 32 veces. Una magnitud 4 no es el doble de 2, sino que 100 veces mayor.

(El Doctor en física de la Universidad de Barcelona, Sr. Josep Vila, nos aporta que entre magnitud 2 y magnitud 4, lo que aumenta 100 veces sería la amplitud de las ondas y no la energía. La energía aumentaría un factor 33 cada grado de magnitud, con lo cual sería 1000 veces cada dos unidades).

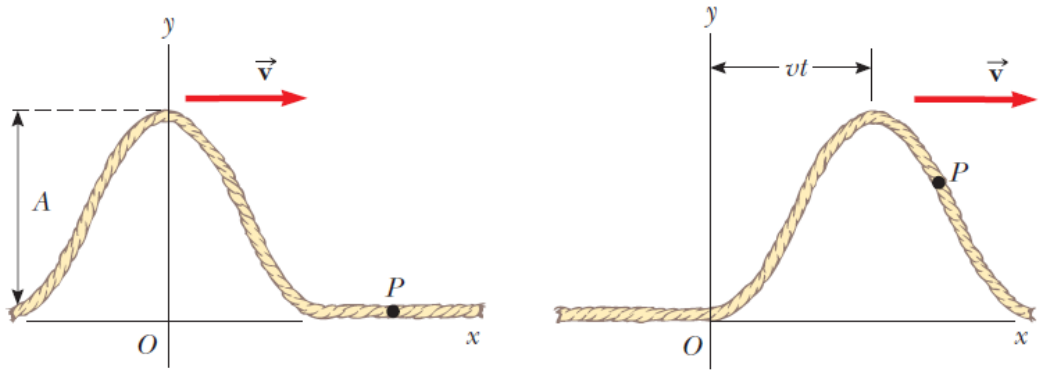
El gran mérito del Dr. Charles F. Richter (del California Institute for Technology, 1935) consiste en asociar la magnitud del Terremoto con la "amplitud" de la onda sísmica, lo que redunda en propagación del movimiento en un área determinada. El análisis de esta onda (llamada "S") en un tiempo de 20 segundos en un registro sismográfico, sirvió como referencia de "calibración" de la escala. Teóricamente en esta escala pueden darse sismos de magnitud negativa, lo que corresponderá a leves movimientos de baja liberación de energía.

Escalas Sísmicas

Escala De Mercalli

Grado	Descripción
I. Muy débil	No se advierte sino por unas pocas personas y en condiciones de perceptibilidad especialmente favorables.
II. Débil	Se percibe sólo por algunas personas en reposo, particularmente aquellas que se encuentran ubicadas en los pisos superiores de los edificios.
III. Leve	Se percibe en los interiores de los edificios y casas.
IV. Moderado	Los objetos colgantes oscilan visiblemente. La sensación percibida es semejante a la que produciría el paso de un vehículo pesado. Los automóviles detenidos se mecen.
V. fuerte	La mayoría de las personas lo percibe aun en el exterior. Los líquidos oscilan dentro de sus recipientes y pueden llegar a derramarse. Los péndulos de los relojes alteran su ritmo o se detienen. Es posible estimar la dirección principal del movimiento sísmico.
VI. Bastante Fuerte	Lo perciben todas las personas. Se siente inseguridad para caminar. Se quiebran los vidrios de las ventanas, la vajilla y los objetos frágiles. Los muebles se desplazan o se vuelcan. Se hace visible el movimiento de los árboles, o bien, se les oye crujir.
VII. Muy fuerte	Los objetos colgantes se estremecen. Se experimenta dificultad para mantenerse en pie. Se producen daños de consideración en estructuras de albañilería mal construidas o mal proyectadas. Se dañan los muebles. Caen trozos de mampostería, ladrillos, parapetos, cornisas y diversos elementos arquitectónicos. Se producen ondas en los lagos.
VIII. Destructivo	Se hace difícil e inseguro el manejo de vehículos. Se producen daños de consideración y aun el derrumbe parcial en estructuras de albañilería bien construidas. Se quiebran las ramas de los árboles. Se producen cambios en las corrientes de agua y en la temperatura de vertientes y pozos.
IX. Ruinoso	Pánico generalizado. Todos los edificios sufren grandes daños. Las casas sin cimentación se desplazan. Se quiebran algunas canalizaciones subterráneas, la tierra se fisura.
X. Desastroso	Se destruye gran parte de las estructuras de albañilería de toda especie. El agua de canales, ríos y lagos sale proyectada a las riberas.
XI. Muy desastroso	Muy pocas estructuras de albañilería quedan en pie. Los rieles de las vías férreas quedan fuertemente deformados. Las cañerías subterráneas quedan totalmente fuera de servicio.
XII. Catastrófico	El daño es casi total. Se desplazan grandes masas de roca. Los objetos saltan al aire. Los niveles y perspectivas quedan distorsionados.

Pulsos de Ondas



a) Pulso en $t = 0$ b) Pulso en el tiempo t

Un pulso unidimensional que viaja hacia la derecha con una rapidez v. a) En $t = 0$, la forma del pulso se conoce por $y = f(x)$. b) En algún tiempo posterior t, la forma permanece invariable y la posición vertical de un elemento del medio en cualquier punto P se conoce por $y = f(x - vt)$.

En general, después, se representa la posición transversal y para todas las posiciones y tiempos, medida en un marco estable con el origen en O, como

Pulso que viaja hacia la derecha ▶ $$y(x, t) = f(x - vt)$$

De igual modo, si el pulso viaja hacia la izquierda, las posiciones transversales de los elementos de la cuerda se describen mediante

Pulso que viaja hacia la izquierda ▶ $$y(x, t) = f(x + vt)$$

La función y, a veces llamada **función de onda**, depende de las dos variables x y t.

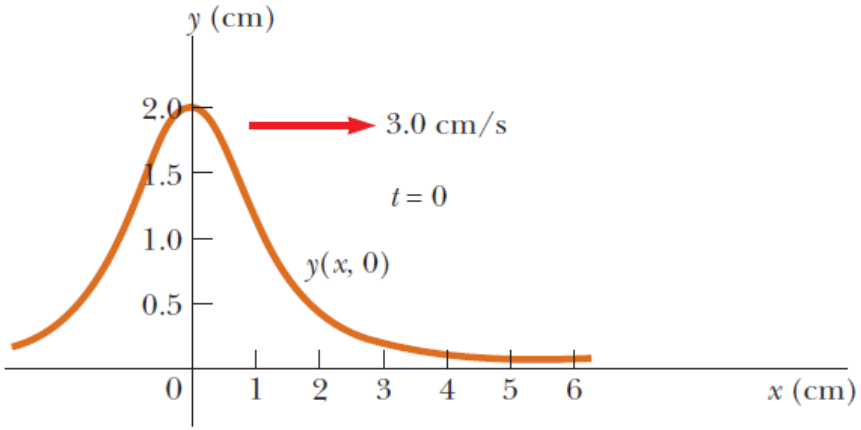
Pregunta rápida **i)** En una larga fila de personas que esperan comprar boletos, la primera persona sale y un pulso de movimiento se presenta a medida que las personas caminan hacia adelante para llenar el hueco. A medida que cada persona camina hacia adelante, el hueco se mueve a través de la fila. La propagación de este hueco es, ¿a) transversal, o b) longitudinal? **ii)** Considere la "ola" en un juego de beisbol: las personas se ponen de pie y levantan sus brazos a medida que la ola llega a sus posiciones, y el pulso resultante se mueve alrededor del estadio. Esta onda es, ¿a) transversal, o b) longitudinal?

EJEMPLO **Un pulso que se mueve hacia la derecha**

Un pulso que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x se representa mediante la función de onda

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3.0t)^2 + 1}$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos. Encuentre expresiones para la función de onda en $t = 0$, $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.



SOLUCIÓN

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 0$: $$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 1.0$ s: $$y(x, 1.0) = \frac{2}{(x - 3.0)^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 2.0$ s: $$y(x, 2.0) = \frac{2}{(x - 6.0)^2 + 1}$$

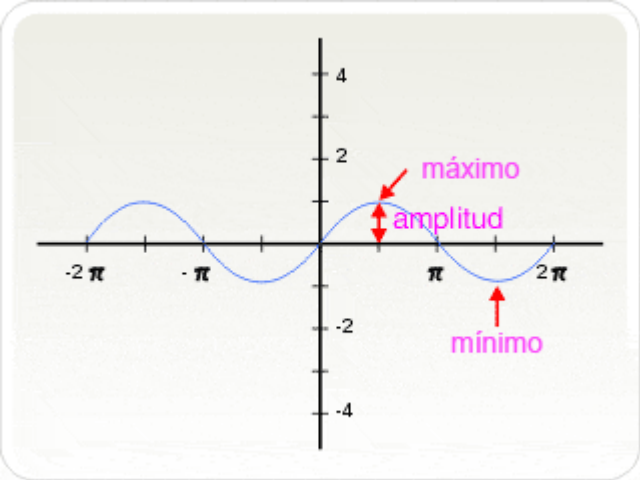
¿Qué pasaría si? ¿Si la función de onda fuese

$$y(x, t) = \frac{4}{(x + 3.0t)^2 + 1}?$$

¿Esto cómo cambiaría la situación?

Respuesta Una nueva característica en esta expresión es el signo mas en el denominador en lugar del signo menos. La nueva expresión representa un pulso con la misma forma que en la figura anterior, pero que se mueve hacia la izquierda a medida que avanza el tiempo.

Otra nueva característica en este caso es el numerador 4 en vez de 2. Por lo tanto, la nueva expresión representa un pulso con el doble de alto que en la figura.



El modelo de onda progresiva

onda sinusoidal

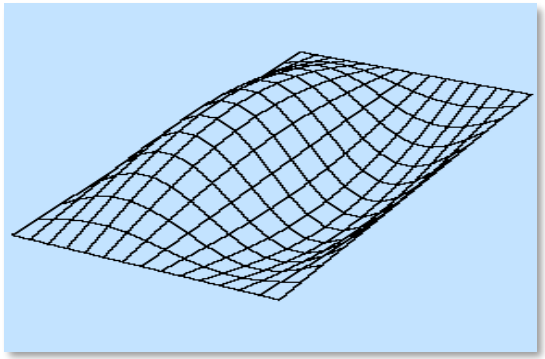
La curva café en la figura 16.7 representa una instantánea de una onda sinusoidal progresiva en $t = 0$, y la curva azul representa una instantánea de la onda en algún tiempo posterior t.

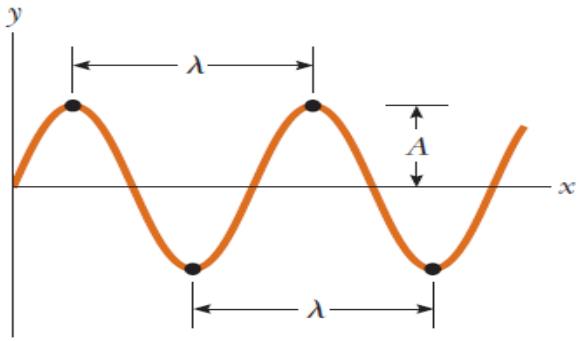
La frecuencia de una onda sinusoidal se relaciona con el periodo

$$f = \frac{1}{T}$$

La unidad de frecuencia es s^{-1}, o **hertz** (Hz).

La máxima posición de un elemento del medio relativo a su posición de equilibrio se llama **amplitud** A de la onda.





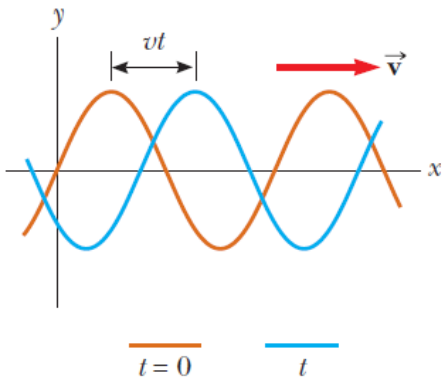
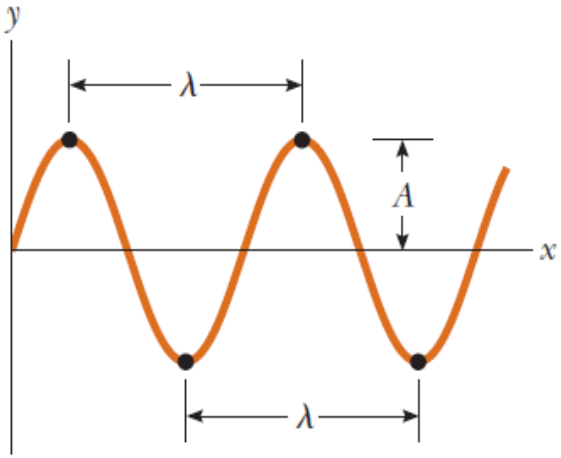


Figura 16.7 Una onda sinusoidal unidimensional que viaja hacia la derecha con una rapidez v. La curva café representa una instantánea de la onda en $t = 0$ y la curva azul representa una instantánea en algún tiempo después t.

$$y(x, 0) = A \operatorname{sen} ax$$

El modelo de onda progresiva



En $x = 0$, se ve que $y(0, 0) = A \text{ sen } a(0) = 0$, consistente con la figura.

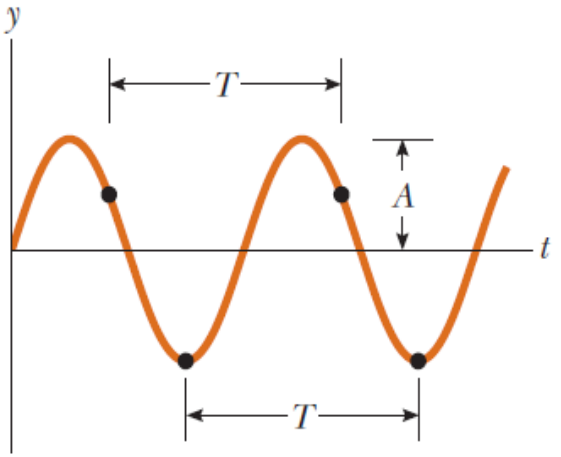
El siguiente valor de x para el que y es cero es $x = \lambda/2$. Debido a eso

$$y\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = A \text{ sen } \left(a\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Para que esta ecuación sea cierta, debe tener $a\lambda/2 = \pi$ o $a = 2\pi/\lambda$. En consecuencia, la función que describe las posiciones de los elementos del medio a través del que viaja la onda sinusoidal se puede escribir

$$y(x, 0) = A \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

donde la constante A representa la amplitud de onda y la constante λ es la longitud de onda.

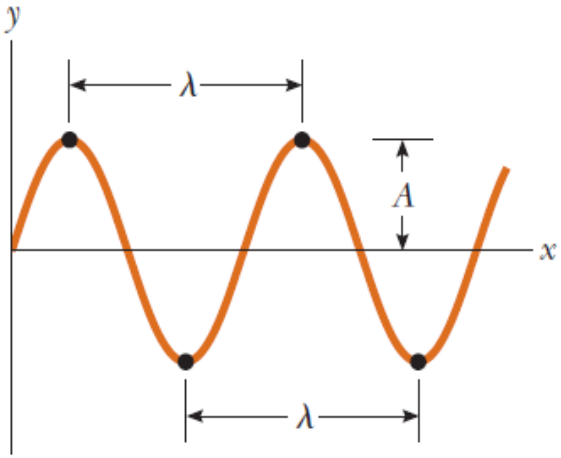


Note que la posición vertical de un elemento del medio es la misma siempre que x aumente por un múltiplo entero de λ. Si la onda se mueve hacia la derecha con una rapidez v, la función de onda en algún tiempo posterior t es

$$y(x, t) = A \text{ sen } \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

La función de onda tiene la forma $f(x - vt)$ (ecuación 16.1). Si la onda viajara hacia la izquierda, la cantidad $x - vt$ se sustituiría por $x + vt$.

El modelo de onda progresiva

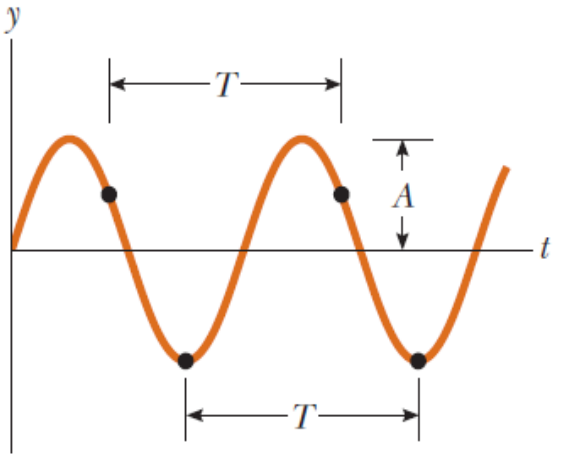


Por definición, la onda viaja a través de un desplazamiento Δx igual a una longitud de onda λ en un intervalo de tiempo Δt de un periodo T. Por tanto, la rapidez de onda, la longitud de onda y el periodo se relacionan mediante la expresión

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T}$$

Al sustituir esta expresión para v se obtiene

$$y = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$



Esta forma de la función de onda muestra la naturaleza *periódica* de y.

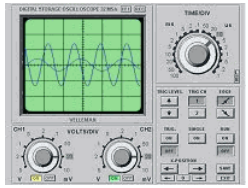
En cualquier tiempo dado t, y tiene el *mismo* valor en las posiciones x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. Además, en cualquier posición determinada x, el valor de y es el mismo en los tiempos t, $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

El modelo de onda progresiva

La función de onda se expresa en una forma conveniente al definir otras dos cantidades, el **número de onda angular** k (por lo general simplemente llamado **número de onda**) y la **frecuencia angular** ω:

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

◀ Número de onda angular

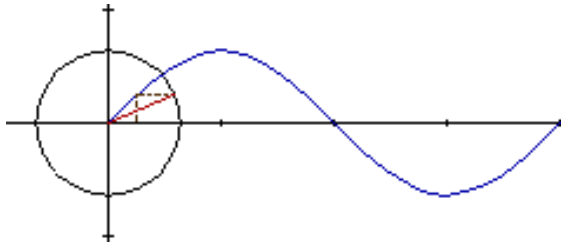


Frecuencia angular ▶

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Función de onda para una onda sinusoidal ▶

$$y = A \operatorname{sen}\,(kx - \omega t)$$



$$v = \frac{\omega}{k}$$

Rapidez de una onda sinusoidal ▶

$$v = \lambda f$$

la función de onda por lo general se expresa en la forma

Expresión general para una onda sinusoidal ▶ $y = A \operatorname{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$

donde ϕ es la **constante de fase**, Esta constante se determina a partir de las condiciones iniciales.

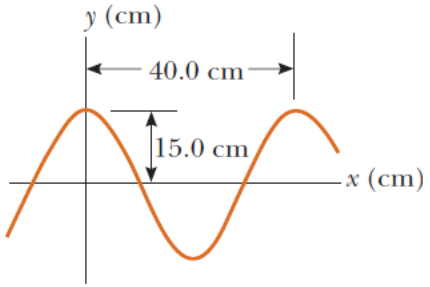
Pregunta rápida Una onda sinusoidal de frecuencia f viaja a lo largo de una cuerda estirada. La cuerda se lleva al reposo y una segunda onda progresiva con frecuencia $2f$ se establece en la cuerda. **i)** ¿Cuál es la rapidez de onda de la segunda onda? a) el doble de la primera onda, b) la mitad de la primera onda, c) la misma que la primera onda, d) imposible de determinar. **ii)** A partir de las mismas opciones, describa la longitud de onda de la segunda onda. **iii)** A partir de las mismas opciones, describa la amplitud de la segunda onda.

EJEMPLO **Una onda sinusoidal progresiva**

Una onda sinusoidal progresiva en la dirección x positiva tiene una amplitud de 15.0 cm, longitud de onda de 40.0 cm y frecuencia de 8.00 Hz. La posición vertical de un elemento del medio en $t = 0$ y $x = 0$ también es de 15.0 cm, como se muestra en la figura 16.9.

A) Encuentre el número de onda k, periodo T, frecuencia angular ω y rapidez v de la onda.

B) Determine la constante de fase ϕ y escriba una expresión general para la función de onda.



onda sinusoidal con longitud de onda $\lambda = 40.0$ cm y amplitud $A = 15.0$ cm. La función de onda se puede escribir en la forma $y = A \cos(kx - \omega t)$.

SOLUCIÓN

A)

Evalúe el número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{40.0 \text{ cm}} = 0.157 \text{ rad/cm}$

Calcule el periodo de la onda: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00 \text{ s}^{-1}} = 0.125 \text{ s}$

Evalúe la frecuencia angular de la onda: $\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00 \text{ s}^{-1}) = 50.3 \text{ rad/s}$

Calcule la rapidez de onda: $v = \lambda f = (40.0 \text{ cm})(8.00 \text{ s}^{-1}) = 320 \text{ cm/s}$

SOLUCIÓN

B)

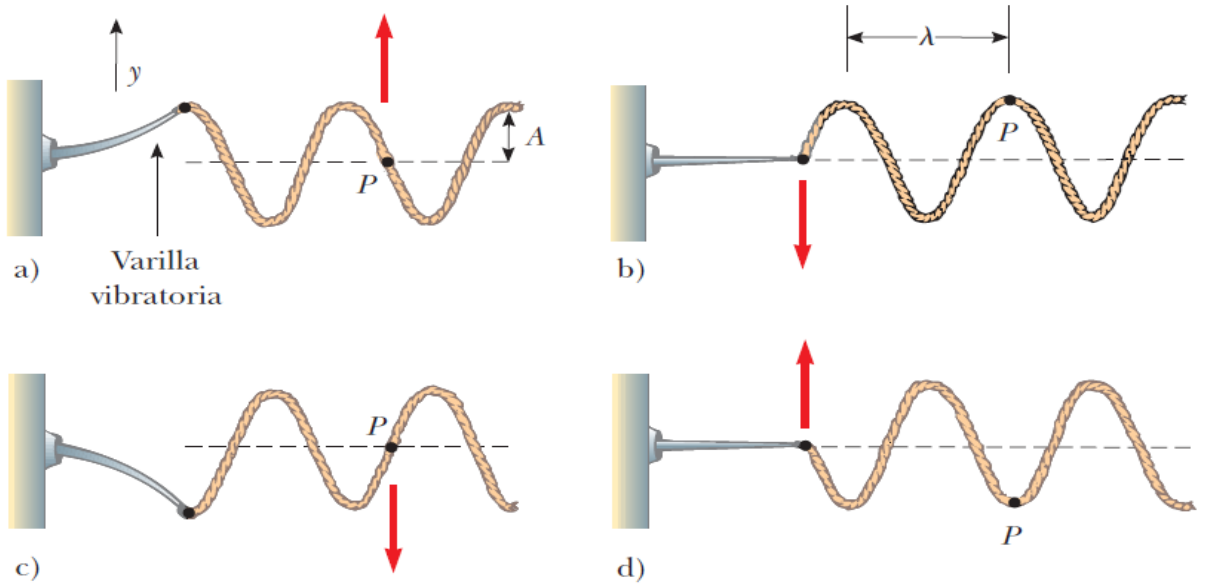
Sustituya $A = 15.0$ cm, $y = 15.0$ cm, $x = 0$ y $t = 0$: $15.0 = (15.0)\,\text{sen}\,\phi \rightarrow \text{sen}\,\phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$ rad

Escriba la función de onda: $y = A\,\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(kx - \omega t)$

Sustituya los valores para A, k y ω en esta expresión: $y = (15.0 \text{ cm})\cos(0.157x - 50.3t)$

Ondas sinusoidales en cuerdas

$$y = A \operatorname{sen}\ (kx - \omega t)$$



Un método para producir una onda sinusoidal sobre una cuerda. El extremo izquierdo de la cuerda se conecta a una varilla que se pone a oscilar. Cualquier elemento de la cuerda, como el que se encuentra en el punto P, oscila con movimiento armónico simple en la dirección vertical.

Un elemento en el punto P (o cualquier otro elemento de la cuerda) se mueve sólo verticalmente, y de este modo su coordenada x permanece constante. Por lo tanto, la **rapidez transversal** v_y (no confundir con la rapidez de onda v) y la **aceleración transversal** a_y de los elementos de la cuerda son

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos\ (kx - \omega t)$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right]_{x=\text{constante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \operatorname{sen}\ (kx - \omega t)$$

Ondas sinusoidales en cuerdas

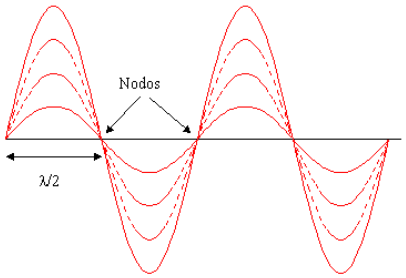
Los valores máximos de la rapidez transversal y la aceleración transversal son simplemente los valores absolutos de los coeficientes de las funciones coseno y seno:

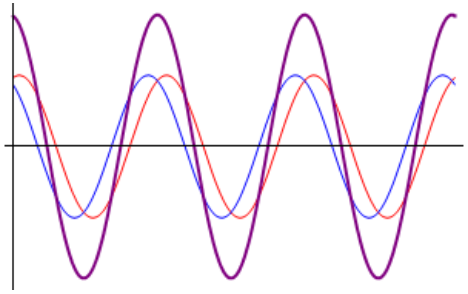
$$v_{y,\,\text{máx}} = \omega A$$

$$a_{y,\,\text{máx}} = \omega^2 A$$

La rapidez transversal y la aceleración transversal de los elementos de la cuerda no llegan simultáneamente a sus valores máximos. La rapidez transversal llega a su valor máximo (ωA) cuando $y = 0$, mientras que la magnitud de la aceleración transversal llega a su valor máximo ($\omega^2 A$) cuando $y = \pm A$.

Pregunta rápida La amplitud de una onda se duplica, sin que se hagan otros cambios a la onda. Como resultado de esta duplicación, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto? a) La rapidez de la onda cambia. b) La frecuencia de la onda cambia. c) La máxima rapidez transversal de un elemento del medio cambia. d) Los enunciados del inciso a) al c) son todos verdaderos. e) Ninguno de los enunciados del inciso a) al c) es verdadero.





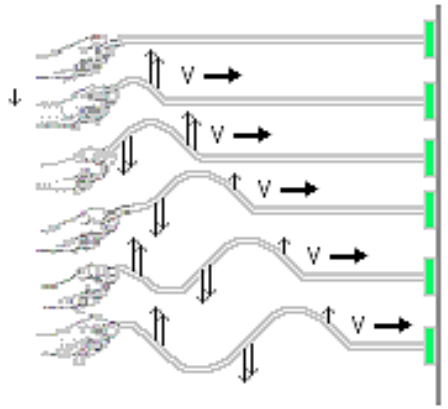
La rapidez de ondas en cuerdas

Si una cuerda bajo tensión se jala hacia los lados y luego se libera, la fuerza de tensión es responsable por acelerar un elemento particular de la cuerda de regreso hacia su posición de equilibrio. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del elemento aumenta con tensión creciente. Si el elemento regresa al equilibrio más rápidamente debido a esta aceleración aumentada, intuitivamente se argumentaría que la rapidez de la onda es mayor. En consecuencia, se espera que la rapidez de la onda aumente con tensión creciente.

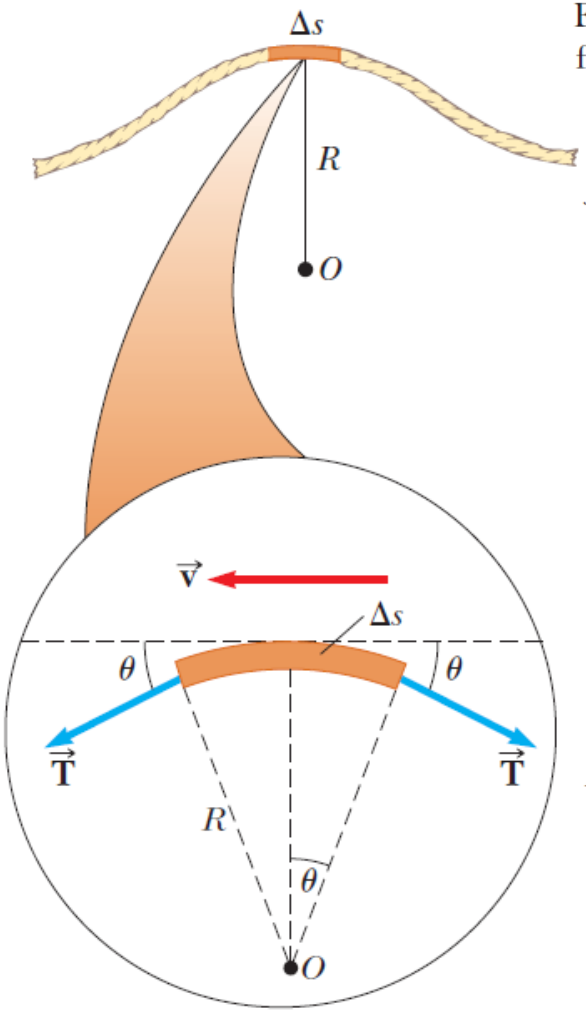
Del mismo modo, ya que es más difícil acelerar un elemento pesado de la cuerda que un elemento ligero, la rapidez de la onda debe disminuir a medida que aumente la masa por unidad de longitud de la cuerda. Si la tensión en la cuerda es T y su masa por unidad de longitud es μ (letra griega mu), la rapidez de onda, como se demostrará, es

Rapidez de una onda sobre una cuerda estirada ▶

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



La rapidez de ondas en cuerdas



El pequeño elemento de la cuerda de longitud Δs que se muestra en la figura forma un arco aproximado de un círculo de radio R.

En el marco de referencia móvil (que se mueve hacia la derecha con una rapidez v junto con el pulso), el elemento sombreado se mueve hacia la izquierda con una rapidez v. Este elemento tiene una aceleración centrípeta igual a v^2/R, que la proporcionan los elementos de la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ cuya magnitud es la tensión en la cuerda. La fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ actúa a ambos lados del elemento y es tangente al arco, como se muestra en la figura.

Las componentes horizontales de $\vec{\mathbf{T}}$ se cancelan y cada componente vertical T sen θ actúa radialmente hacia el centro del arco. Por eso, la fuerza radial total sobre el elemento es $2T$ sen θ. Ya que el elemento es pequeño, θ es pequeño, y por lo tanto se puede usar la aproximación de ángulo pequeño sen $\theta \approx \theta$. De este modo, la fuerza radial total es

$$F_r = 2T \operatorname{sen} \theta \approx 2T\theta$$

El elemento tiene una masa $m = \mu\Delta s$. Ya que el elemento forma parte de un círculo y subtiende a un ángulo 2θ en el centro, $\Delta s = R(2\theta)$ y

$$m = \mu\Delta s = 2\mu R\theta$$

Al aplicar a este elemento la segunda ley de Newton en la dirección radial se obtiene

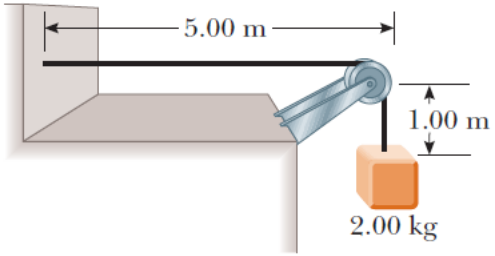
$$F_r = ma = \frac{mv^2}{R}$$

$$2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Advierta que esta deducción es de acuerdo con la suposición de que la altura del pulso es pequeña en relación con la longitud de la cuerda. Al usar esta suposición, se tiene posibilidad de usar la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Además, el modelo supone que la tensión T no es afectada por la presencia del pulso; en consecuencia, T es la misma en todos los puntos en la cuerda. Por último, esta prueba *no* supone alguna forma particular para el pulso. Por lo tanto, un pulso *de cualquier forma* viaja a lo largo de la cuerda con rapidez $v = \sqrt{T/\mu}$ sin cambio alguno en la forma del pulso.

EJEMPLO **La rapidez de un pulso en una cuerda**

Una cuerda uniforme tiene una masa de 0.300 kg y una longitud de 6.00 m (figura 16.12). La cuerda pasa sobre una polea y soporta un objeto de 2.00 kg. Encuentre la rapidez de un pulso que viaje a lo largo de esta cuerda.



(Ejemplo 16.3) La tensión T en la cuerda se mantiene mediante el objeto suspendido. La rapidez de cualquier onda que viaje a lo largo de la cuerda está dada por $v = \sqrt{T/\mu}$.

SOLUCIÓN

Aplique al bloque el modelo de partícula en equilibrio:

$$\sum F_y = T - m_{\text{bloque}} g = 0$$

Resuelva para la tensión en la cuerda: $T = m_{\text{bloque}} g$

encontrar la rapidez de la onda,
use $\mu = m_{\text{cuerda}}/\ell$ para la densidad de masa lineal de la cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_{\text{bloque}} g \ell}{m_{\text{cuerda}}}}$$

Evalúe la rapidez de la onda: $v = \sqrt{\dfrac{(2.00\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(6.00\ \text{m})}{0.300\ \text{kg}}} = 19.8\ \text{m/s}$

EJEMPLO **Rescate del excursionista**

Un excursionista de 80.0 kg queda atrapado en la saliente de una montaña después de una tormenta. Un helicóptero rescata al excursionista: se mantiene encima de él y le baja un cable, la masa del cable es de 8.00 kg y su longitud de 15.0 m. El cable se amarra a un cabestrillo de 70.0 kg de masa. El excursionista se ata al cabestrillo y después el helicóptero acelera hacia arriba. Aterrorizado por colgar del cable a mitad del aire, el excursionista intenta enviar señales al piloto lanzando pulsos transversales por el cable. Un pulso tarda 0.250 s en recorrer la longitud del cable. ¿Cuál es la aceleración del helicóptero?

SOLUCIÓN

Use el intervalo de tiempo en que el pulso viaja del excursionista al helicóptero para encontrar la rapidez de los pulsos en el cable:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15.0\ \text{m}}{0.250\ \text{s}} = 60.0\ \text{m/s}$$

Resuelva la ecuación para la tensión en el cable:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \rightarrow \quad T = \mu v^2$$

Modele al excursionista y el cabestrillo como una partícula bajo una fuerza neta, y note que la aceleración de esta partícula de masa m es la misma que la aceleración del helicóptero:

$$\sum F = ma \quad \rightarrow \quad T - mg = ma$$

Resuelva para la aceleración:

$$a = \frac{T}{m} - g = \frac{\mu v^2}{m} - g = \frac{m_{\text{cable}} v^2}{\ell_{\text{cable}} m} - g$$

Sustituya valores numéricos:

$$a = \frac{(8.00\ \text{kg})(60.0\ \text{m/s})^2}{(15.0\ \text{m})(150.0\ \text{kg})} - 9.80\ \text{m/s}^2 = 3.00\ \text{m/s}^2$$

Velocidad de propagación de ondas mecánicas

- La velocidad de propagación de ondas transversales en una cuerda depende de la tensión (T) a la que está sometida y de su masa por unidad de longitud (μ)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- La velocidad del sonido en el aire en función de la temperatura absoluta (T) del aire es:

$$v = c\sqrt{T}$$ siendo c una constante

- La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un sólido, depende de su coeficiente de dilatación, denominado módulo de Young (Y) y de su densidad (ρ)

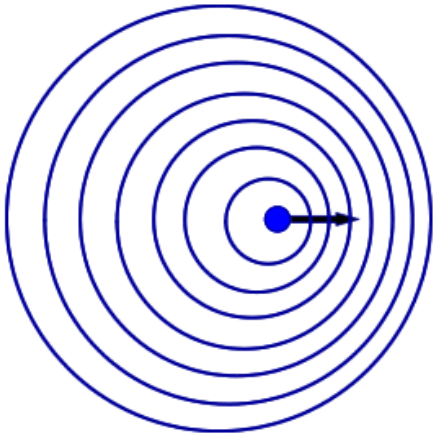
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas, excepto en el vacío, depende de una característica del medio en el que se propagan, como la permitividad magnética (μ) y la constante dieléctrica (ε)

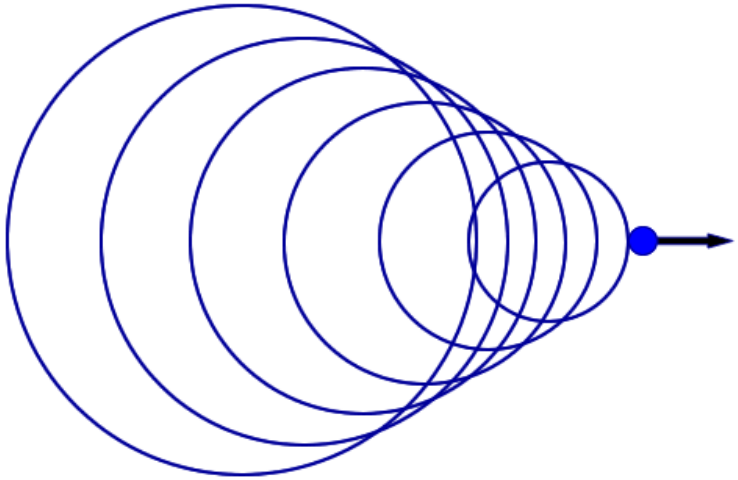
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}$$

Propagación del Sonido

Las ondas viajan con una rapidez específica, y esta rapidez depende de las propiedades del medio perturbado. Por ejemplo, las ondas sonoras viajan a través de aire a temperatura ambiente con una rapidez aproximada de 343 m/s (781 mi/h), mientras que en la mayoría de los sólidos viajan con una rapidez mayor a 343 m/s.



Propagación del sonido cuando nos desplazamos a velocidad subsónica



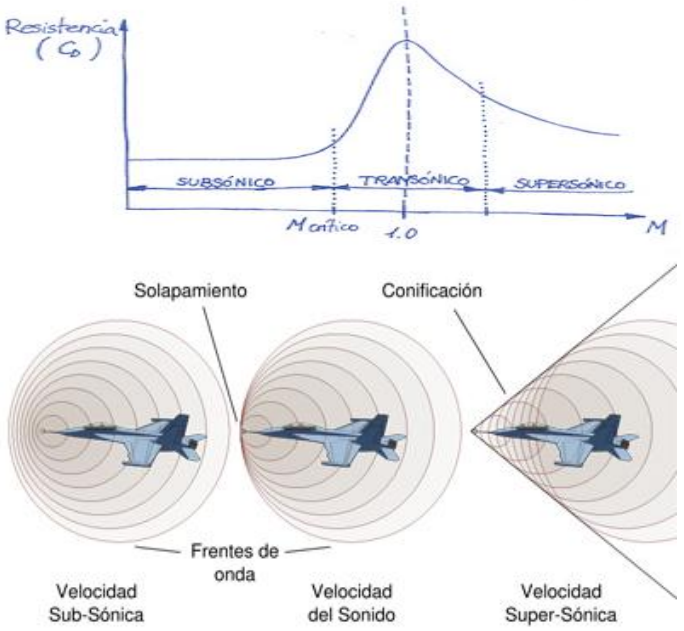
Propagación del sonido cuando nos desplazamos a velocidad supersónica

Ondas Supersónicas

Cuando un avión se acerca a la velocidad del sonido, las ondas sonoras que genera, debido a que se desplazan casi a la misma velocidad que el aparato, no pueden adelantarlo con lo que se van acumulando delante del avión formando el muro de aire comprimido (el sonido no es otra cosa mas que una compresión del aire). Al llegar a la velocidad del sonido, se produce de forma brusca una modificación en la compresibilidad del aire, llamada onda de choque. El resultado de esta distorsión incrementa la resistencia al avance del avión que afecta a la sustentación del ala y a los mandos de vuelo. Por tanto, en los aviones que no estén adecuadamente diseñados, es imposible controlar el vuelo.

Cuando el avión acelera por encima de la velocidad del sonido, adelanta a este muro (el sonido va ahora mas despacio que el avión, con lo que las ondas ya no pueden seguirlo) "rompiéndolo"; esta rotura provoca el llamado "estampido sónico".

Cuando el valor del Mach (o M, la velocidad del avión dividida entre la del sonido) se acerca a uno, la fuerza de resistencia aerodinámica se “dispara”.

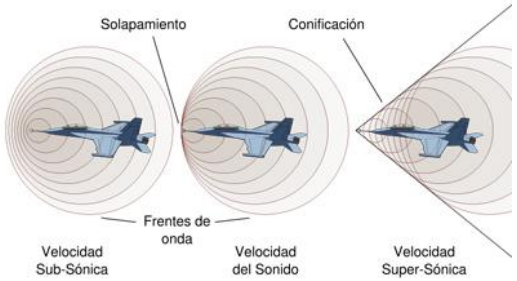


Ondas Supersónicas

¿Por qué se produce una explosión cuando se rompe la barrera del sonido?

Cuando un objeto **sobrepasa la velocidad del sonido** (340 m/s, unos 1230 Km/h) se produce la conocida **explosión sónica**, tan espectacular de escuchar como de ver, ya que crea efectos en ambos sentidos.

Lo que vemos cuando un avión rompe la barrera del sonido es, en primer lugar, **un cono de vapor de agua** que rodea la cola del avión, **y a continuación se escucha un gran estruendo** (de unos 200dB). En realidad son dos, uno en la cabeza y otro en la cola, pero suelen ocurrir tan juntos que se perciben como uno solo.



Finalmente, al alcanzar la barrera, **se libera rápidamente la energía acumulada en una explosión sónica, lo que produce un cambio brusco de presión** que crea la condensación de vapor de agua que vemos en la cola.

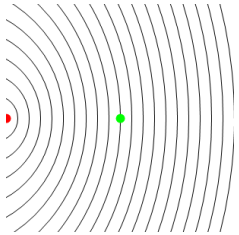
Curiosamente, **el piloto del avión no escuchará nada** y de hecho a penas lo notará. Esto ocurre gracias a que el sonido generado viaja más despacio que el avión por lo que no alcanza la cabina del piloto.

Por último, recordar que **este fenómeno no es exclusivo de los aviones**, aunque claramente es el caso más espectacular. El efecto **se produce también** a menor escala (y sin efecto visual) en lugares más cotidianos como **el chasquido que se produce en la punta de un látigo**. Al darle impulso, éste se desplaza a lo largo del látigo que va reduciendo su masa a medida que se acerca a la punta donde su masa es casi 0, y dado que la energía es constante, se produce una brusca liberación de energía.

Ondas Supersónicas

Veamos la explicación matemática de este choque sónico. La frecuencia que percibe un observador en reposo se puede expresa con esta ecuación,

$$f' = f.\left(\frac{1}{1 \pm \frac{v_s}{v}}\right)$$



siendo Vs la velocidad del móvil y V la velocidad del sonido. Cuando el móvil se aproxima a V lo entenderemos como un límite:

$$f' = \lim_{v_s \to v} f.\left(\frac{1}{1 \pm \frac{v_s}{v}}\right)$$

Frecuencia	Sonido	Vibración
Baja	Grave	Lenta
Alta	Agudo	Rápida

El **número Mach**

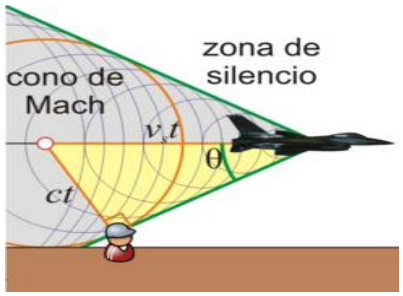
$$M = \frac{V}{V_s}$$

- Subsónico M < 0,7
- Transónico 0,7 < M < 1,2
- Supersónico 1,2 < M < 5
- Hipersónico M > 5

Ernst Mach (1838-1916)

Cuando se igualen Vs y V (momento en que se alcanza la velocidad del sonido) se anulará el denominador, dando lugar a una división por 0, que conocemos como singularidad matemática, justo cuando se produce la explosión sónica.

$$Si\ v_s = v \Rightarrow \frac{v_s}{v} = 1 \quad f' = f.\left(\frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}}\right) = f.\left(\frac{1}{1-1}\right) = f.\left(\frac{1}{0}\right)$$

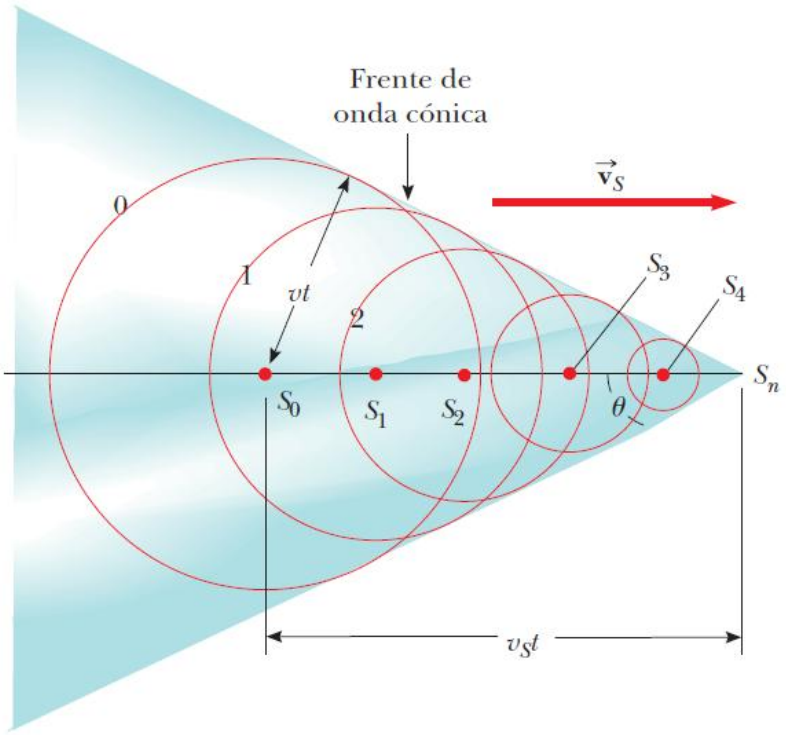


Volando a Mach 2 con el techo de la cabina abierto:

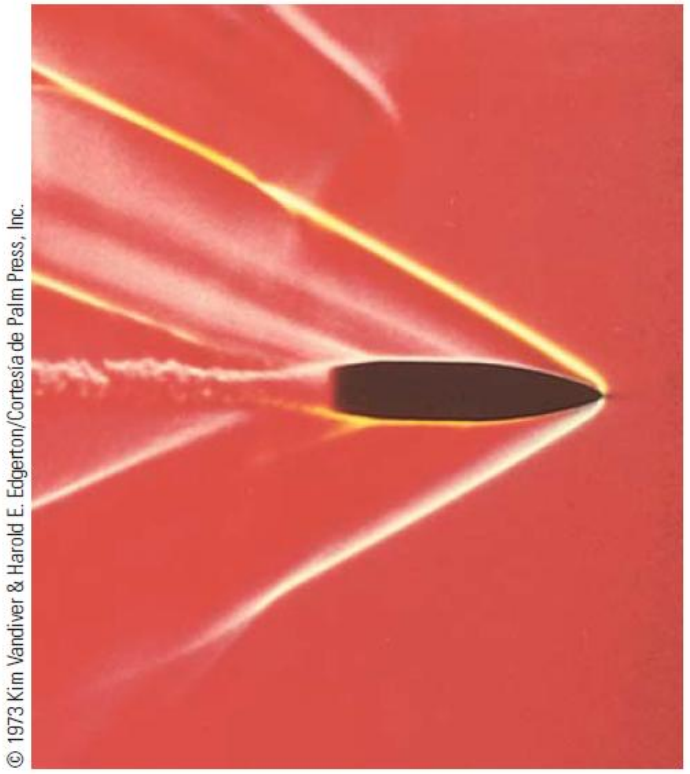
Cuando sacas la mano y la velocidad es de unas dos veces la velocidad del sonido, se te calientan debido a la inmensa fuerza de la fricción.

Esta vez se dispara un revólver. Se puede apreciar claramente que hay dos esferas de sonido, la de la boca del arma y la del tambor.

Ondas de choque



a)



b)

Figura 17.10 a) Una representación de una onda de choque producida cuando una fuente se mueve de S_0 a S_n con una rapidez v_S, que es mayor que la rapidez de onda v en el medio. La envolvente de los frentes de onda forman un cono cuyo semiángulo del vértice se conoce por sen $\theta = v/v_S$. b) Fotografía estroboscópica de una bala que se mueve con rapidez supersónica a través del aire caliente sobre una vela. Advierta la onda de choque en la vecindad de la bala.

La envolvente de estos frentes de onda es un cono cuyo semiángulo del vértice θ (el "ángulo Mach") se conoce por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S}$$

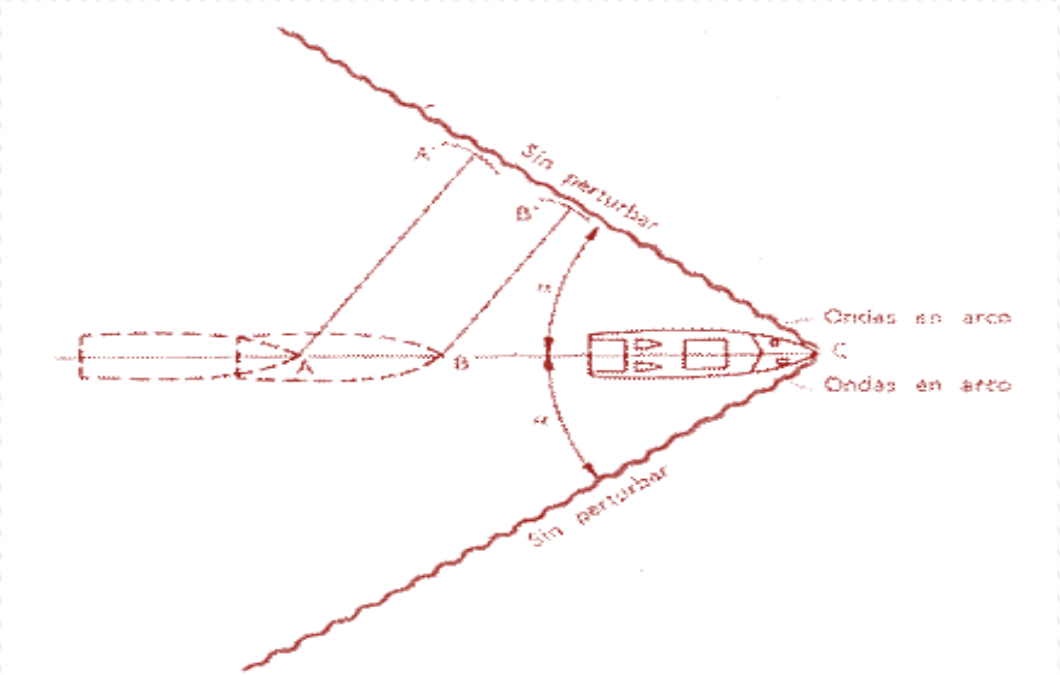


Figura 17.11 La onda de proa con forma en V de un bote se forma debido a que la rapidez del bote es mayor que la rapidez de las ondas del agua que genera. Una onda de proa es análoga a una onda de choque formada por un avión que viaja más rápido que el sonido.

La relación v_S/v se conoce como *número Mach*, y el frente de onda cónico que se produce cuando $v_S > v$ (rapidez supersónica) se conoce como *onda de choque*. Una analogía interesante con las ondas de choque son los frentes de onda con forma en V producidos por un bote (la onda de proa) cuando la rapidez del bote supera la rapidez de las ondas en la superficie del agua (figura 17.11).

Reflexión y transmisión

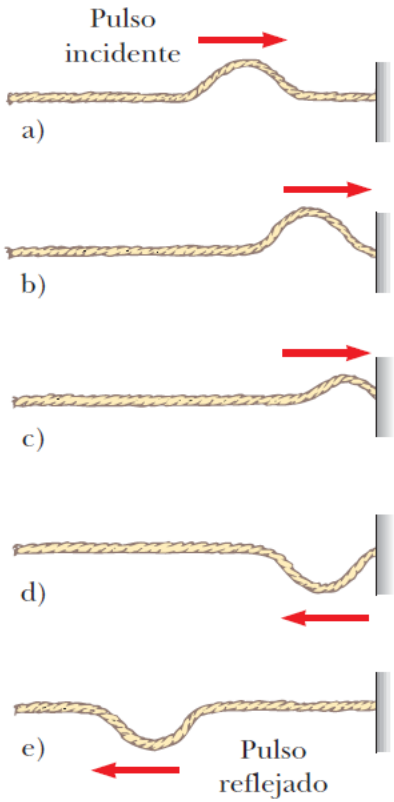


Figura 16.13 Reflexión de un pulso viajero en el extremo fijo de una cuerda estirada. El pulso reflejado está invertido, pero su forma no cambia de otra manera.

Note que el pulso reflejado está *invertido*. Esta inversión se explica del modo siguiente: cuando el pulso alcanza el extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte. Por la tercera ley de Newton, el soporte debe ejercer sobre al cuerda una fuerza de reacción de igual magnitud y con dirección opuesta (hacia abajo). Esta fuerza hacia abajo hace que el pulso se invierta en la reflexión.

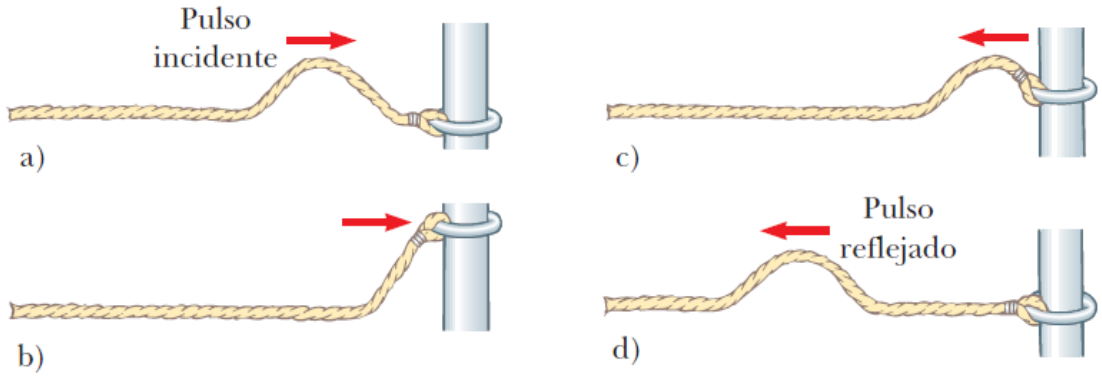


Figura 16.14 Reflexión de un pulso viajero en el extremo libre de una cuerda estirada. El pulso reflejado no está invertido.

Cuando llega al poste, el pulso ejerce una fuerza sobre el extremo libre de la cuerda, lo que hace que el anillo acelere hacia arriba. El anillo se eleva tan alto como el pulso entrante, y luego la componente hacia abajo de la fuerza de tensión jala el anillo de vuelta hacia abajo.

Reflexión y transmisión

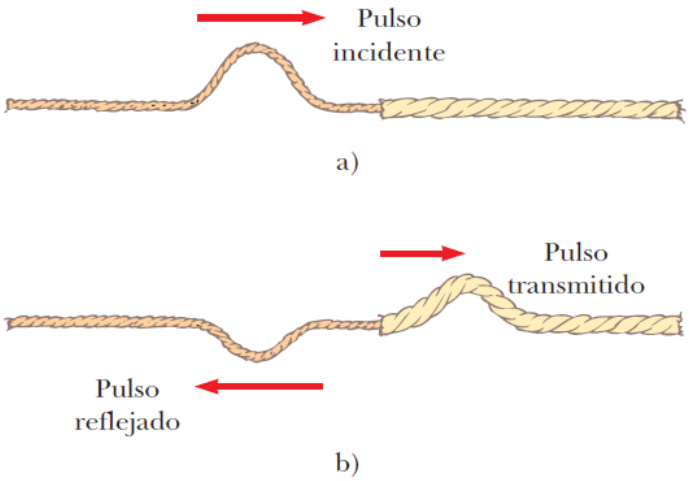


Figura 16.15 a) Pulso que viaja a la derecha sobre una cuerda ligera unida a una cuerda más pesada. b) Parte del pulso incidente se refleja (e invierte) y parte se transmite a la cuerda más pesada.

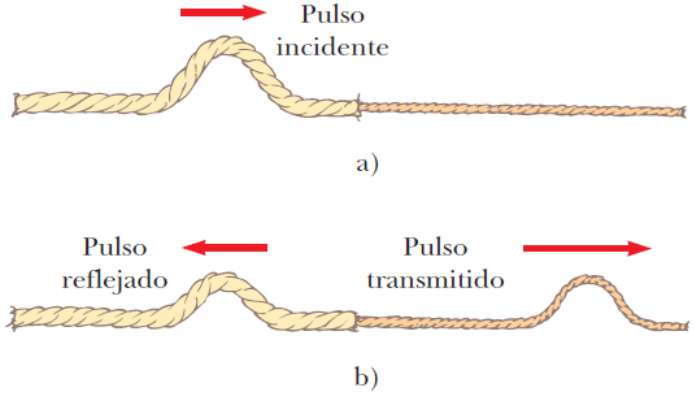


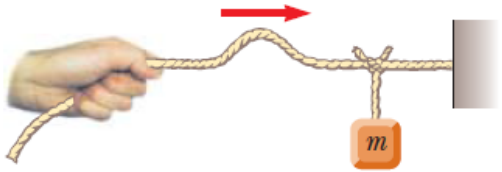
Figura 16.16 a) Pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda pesada unida a una cuerda más ligera. b) El pulso incidente tiene un reflejo parcial y se transmite en partes, y el pulso reflejado no se invierte.

De acuerdo con la ecuación 16.18, la rapidez de una onda sobre una cuerda aumenta a medida que disminuye la masa por unidad de longitud de la cuerda. En otras palabras, una onda viaja más lentamente en una cuerda pesada que sobre una cuerda ligera, si ambas están bajo la misma tensión. Las siguientes reglas generales se aplican a las ondas reflejadas: **cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A > v_B$ (es decir, cuando B es más denso que A), se invierte en la reflexión. Cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A < v_B$ (es decir, cuando A es más denso que B), no se invierte en la reflexión.**

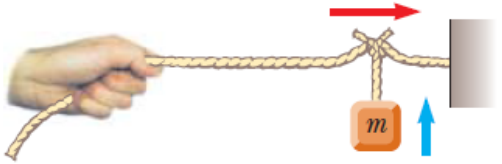
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales en cuerdas

Las ondas transportan energía a través de un medio mientras se propagan.



a)



b)

Figura 16.17 a) Pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda estirada que tiene un objeto suspendido en ella. b) Cuando el pulso llega, se transmite energía al objeto suspendido.

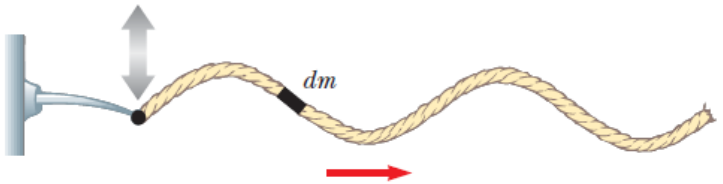


Figura 16.18 Una onda sinusoidal que viaja a lo largo del eje *x* sobre una cuerda estirada. Todo elemento de la cuerda se mueve verticalmente y todo elemento tiene la misma energía total.

Concentre su atención en un elemento infinitesimal de la cuerda de longitud dx y masa dm. Cada uno de tales elementos se mueve verticalmente con movimiento armónico simple. Por lo tanto, cada elemento de la cuerda se modela como un oscilador armónico simple, con la oscilación en la dirección y. Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A. La energía cinética K asociada con una partícula móvil es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Si esta ecuación se aplica al elemento infinitesimal, la energía cinética dK de este elemento es

$$dK = \tfrac{1}{2}(dm)v_y^{\,2}$$

donde v_y es la rapidez transversal del elemento. Si μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, la masa dm del elemento de longitud dx es igual a $\mu\, dx$. Por tanto, la energía cinética de un elemento de la cuerda se expresa como

$$dK = \tfrac{1}{2}(\mu\, dx)v_y^{\,2} \qquad (16.19)$$

Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales en cuerdas

Las ondas transportan energía a través de un medio mientras se propagan.

Al sustituir con la ecuación 16.14 para la rapidez transversal general de un oscilador armónico simple se obtiene

$$dK = \tfrac{1}{2}\mu[-\omega A \cos{(kx - \omega t)}]^2\, dx = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2{(kx - \omega t)}\, dx$$

Si se toma una instantánea de la onda en el tiempo $t = 0$, la energía cinética de un elemento dado es

$$dK = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2{(kx)}\, dx$$

Al integrar esta expresión sobre todos los elementos de cuerda en una longitud de onda de la onda produce la energía cinética total K_A en una longitud de onda:

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2{(kx)}\, dx = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2{(kx)}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\operatorname{sen} 2kx\right]_0^\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\left[\tfrac{1}{2}\lambda\right] = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\lambda$$

Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales en cuerdas

Además de la energía cinética, hay energía potencial asociada con cada elemento de la cuerda debido a su desplazamiento de la posición de equilibrio y las fuerzas restauradoras de elementos colindantes. Un análisis similar al anterior para la energía potencial total U_A en una longitud de onda produce exactamente el mismo resultado:

$$U_\lambda = \tfrac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \qquad \textbf{(16.20)}$$

A medida que la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado en la cuerda durante un intervalo de tiempo de un periodo de la oscilación. Por lo tanto, la potencia $\mathcal{P}$, o rapidez de transferencia de energía T_{OM} asociada con la onda mecánica, es

$$\mathcal{P} = \frac{T_{\text{OM}}}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{T}\right) \qquad \textbf{(16.21)}$$

Potencia de una onda ▶ $\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$

EJEMPLO 16.5 Potencia suministrada a una cuerda en vibración

Una cuerda tensa para la que $\mu = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m está bajo una tensión de 80.0 N. ¿Cuánta potencia se debe suministrar a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de 60.0 Hz y una amplitud de 6.00 cm?

SOLUCIÓN

Evalúe la rapidez de onda sobre la cuerda a partir de la ecuación 16.18:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{80.0 \text{ N}}{5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}}} = 40.0 \text{ m/s}$$

Calcule la frecuencia angular ω de las ondas sinusoidales sobre la cuerda a partir de la ecuación 16.9:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0 \text{ Hz}) = 377 \text{ s}^{-1}$$

Use estos valores y $A = 6.00 \times 10^{-2}$ m en la ecuación 16.1 para evaluar la potencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \\ &= \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m})(377 \text{ s}^{-1})^2(6.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2(40.0 \text{ m/s}) \\ &= 512 \text{ W} \end{aligned}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la cuerda debe transferir energía a una rapidez de 1 000 W? ¿Cuál debe ser la amplitud requerida si todos los otros parámetros permanecen iguales?

Respuesta Establezca una relación de la potencia nueva a la anterior, que refleje sólo un cambio en la amplitud:

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{nueva}}}{\mathcal{P}_{\text{anterior}}} = \frac{\tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{nueva}}^2 v}{\tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{anterior}}^2 v} = \frac{A_{\text{nueva}}^2}{A_{\text{anterior}}^2}$$

Al resolver para la nueva amplitud se obtiene

$$A_{\text{nueva}} = A_{\text{anterior}}\sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{nueva}}}{\mathcal{P}_{\text{anterior}}}} = (6.00 \text{ cm})\sqrt{\frac{1\,000 \text{ W}}{512 \text{ W}}} = 8.39 \text{ cm}$$

La ecuación de onda lineal

Suponga que una onda viajera se propaga a lo largo de una cuerda que está bajo una tensión T. Considere un pequeño elemento de cuerda de longitud Δx (figura 16.19). Los extremos del elemento forman pequeños ángulos θ_A y θ_B con el eje x. La fuerza neta que actúa sobre el elemento en la dirección vertical es

$$\sum F_y = T \operatorname{sen} \theta_B - T \operatorname{sen} \theta_A = T(\operatorname{sen} \theta_B - \operatorname{sen} \theta_A)$$

Ya que los ángulos son pequeños, se puede usar la aproximación de ángulo pequeño $\operatorname{sen} \theta \approx \tan \theta$ para expresar la fuerza neta como

$$\sum F_y \approx T(\tan \theta_B - \tan \theta_A) \qquad \textbf{(16.22)}$$

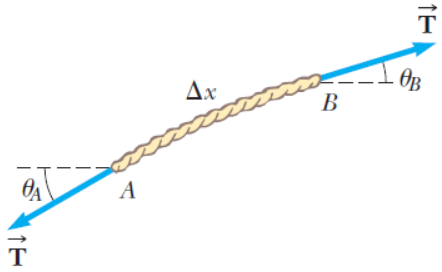


Figura 16.19 Un elemento de cuerda bajo tensión T.

Al sustituir para las tangentes en la ecuación

$$\sum F_y \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] \qquad \textbf{(16.23)}$$

Ahora aplique la segunda ley de Newton al elemento, con la masa del elemento conocido por $m = \mu\, \Delta x$:

$$\sum F_y = ma_y = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \qquad \textbf{(16.24)}$$

Al combinar la ecuación 16.23 con la ecuación 16.24 se obtiene

$$\mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right]$$

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/dx)_A}{\Delta x} \qquad \textbf{(16.25)}$$

La ecuación de onda lineal

El lado derecho de la ecuación 16.25 se expresa en una forma diferente si advierte que la derivada parcial de cualquier función se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Al asociar $f(x + \Delta x)$ con $(\partial y/\partial x)_B$ y $f(x)$ con $(\partial y/\partial x)_A$, se ve que, en el límite $\Delta x \to 0$, la ecuación 16.25 se convierte en

Ecuación de onda lineal para una cuerda ▶

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \textbf{(16.26)}$$

Esta expresión es la ecuación de onda lineal como se aplica a ondas en una cuerda.

La ecuación de onda lineal (ecuación 16.26) con frecuencia se escribe en la forma

Ecuación de onda lineal en general ▶

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(16.27)}$$

la ecuación de onda lineal es satisfecha por *cualquier* función de onda que tenga la forma $y = f(x \pm vt)$.

Resumen

DEFINICIONES

Una **onda sinusoidal** unidimensional es aquella para la cual las posiciones de los elementos del medio varían en forma sinusoidal. Una onda sinusoidal que viaja hacia la derecha se puede expresar con una **función de onda**

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad \textbf{(16.5)}$$

donde A es la **amplitud**, λ es la **longitud de onda** y v es la **rapidez de onda**.

El **número de onda angular** k y la **frecuencia angular** ω de una onda se definen del modo siguiente:

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \textbf{(16.8)}$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \textbf{(16.9)}$$

donde T es el **periodo** de la onda y f es su **frecuencia**

En una **onda transversal** los elementos del medio se mueven en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. En una **onda longitudinal** los elementos del medio se mueven en una dirección *paralela* a la dirección de propagación.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cualquier onda unidimensional que viaja con una rapidez v en la dirección x se representa mediante una función de onda de la forma

$$y(x, t) = f(x \pm vt) \qquad \textbf{(16.1, 16.2)}$$

donde el signo positivo se aplica a una onda que viaja en la dirección x negativa y el signo negativo se aplica a una onda que viaja en la dirección x positiva. La forma de la onda en cualquier instante en el tiempo (una instantánea de la onda) se obtiene al mantener t constante.

La rapidez de una onda que viaja sobre una cuerda tensa de masa por unidad de longitud μ y tensión T es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \textbf{(16.18)}$$

Una onda se refleja total o parcialmente cuando llega al final del medio en el que se propaga o cuando llega a una frontera donde su rapidez cambia de manera discontinua. Si una onda que viaja en una cuerda alcanza un extremo fijo, la onda se refleja e invierte. Si la onda llega a un extremo libre, se refleja mas no se invierte.

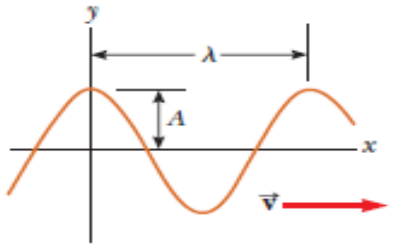
La **potencia** transmitida por una onda sinusoidal sobre una cuerda estirada es

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \qquad \textbf{(16.21)}$$

Las funciones de onda son soluciones a una ecuación diferencial llamada **ecuación de onda lineal:**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(16.27)}$$

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Onda progresiva. La rapidez de onda de una onda sinusoidal es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad \textbf{(16.6, 16.12)}$$

Una onda sinusoidal se expresa como

$$y = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t) \qquad \textbf{(16.10)}$$

Curso de Mecánica Vectorial

OSCILACIONES Y ONDAS MECÁNICAS

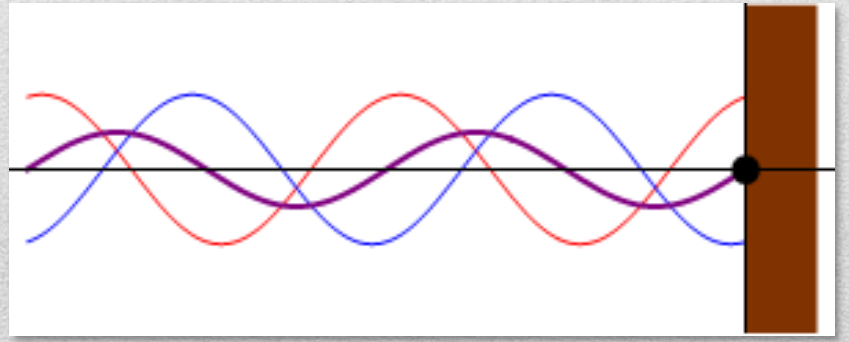
Movimiento oscilatorio

Movimiento ondulatorio

Ondas sonoras

Sobreposición y ondas estacionarias

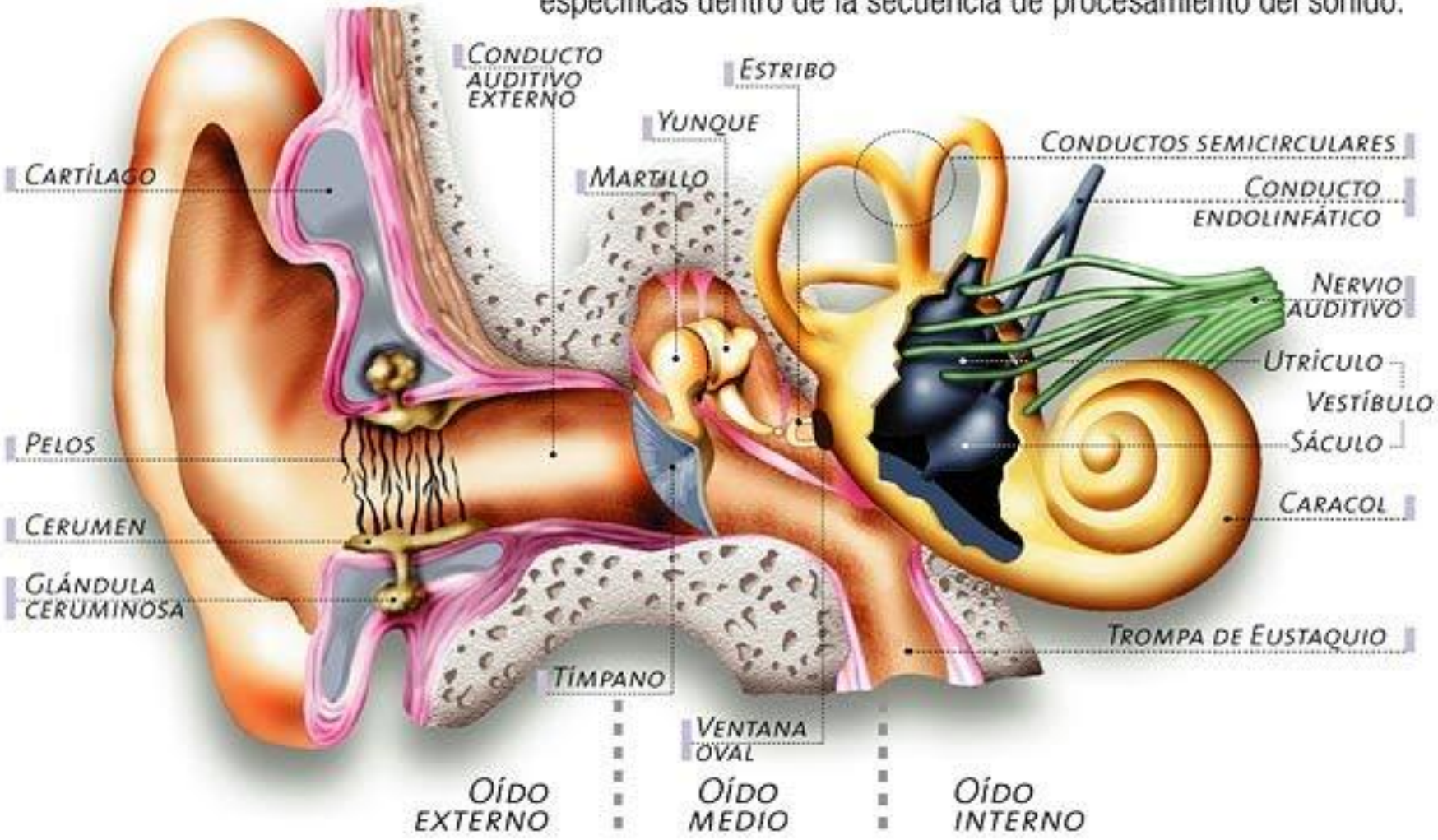
- Rapidez de ondas sonoras
- Ondas sonoras periódicas
- Intensidad de ondas sonoras periódicas
- El efecto Doppler
- Grabación de sonido digital
- Sonido cinematográfico



Los oídos humanos evolucionaron para detectar ondas sonoras e interpretarlas, como la música o el habla. Algunos animales, como este joven zorro orejas de murciélago, tienen oídos adaptados para detectar sonidos muy débiles.

El oído

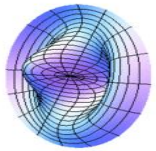
Una de las funciones principales del oído es la de convertir las ondas sonoras en vibraciones que estimulen las células nerviosas, para ello el oído tiene tres partes claramente identificadas. Estas secciones están interconectadas y son el oído externo, el medio y el interno. Cada parte tiene funciones específicas dentro de la secuencia de procesamiento del sonido.



Anatomía

El oído está compuesto de tres partes:

Simulación de la membrana del Tímpano



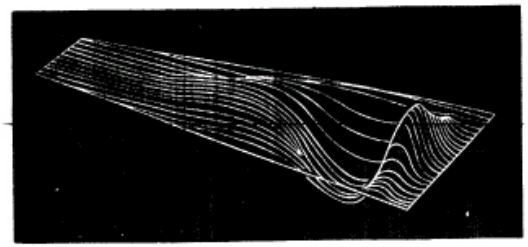
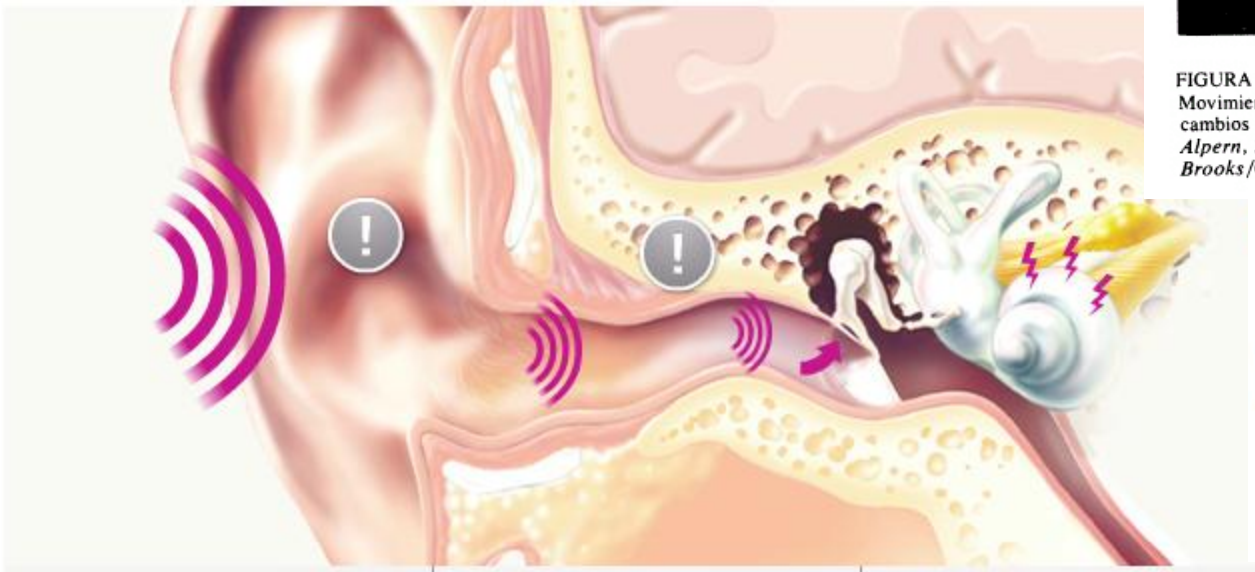
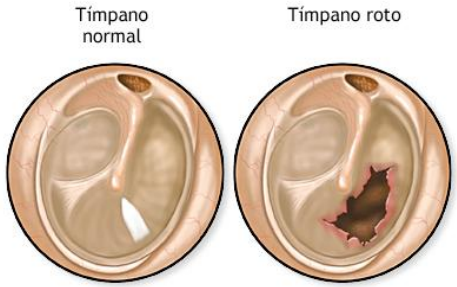


FIGURA 16-34
Movimiento ondular de la membrana basilar, en respuesta a los cambios de presión producidos en el oído interno. (*De M. Alpern, M. Lawrence y D. Wolsk, "Sensory Processes", Brooks/Cole Publishing Company, Belmont. Calif, 1968.*)

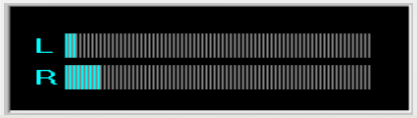




ADAM.

El oído externo

¿Se ha preguntado alguna vez por qué las orejas tienen la forma que tienen? La forma de sus orejas asegura que las ondas sonoras sean captadas y conducidas al tímpano a través del conducto auditivo.



El oído medio

El oído medio está compuesto por el tímpano y tres huesecillos: el martillo, el yunque y el estribo. De hecho, el estribo es el hueso más pequeño del cuerpo. Trabajan conjuntamente para amplificar las ondas sonoras.

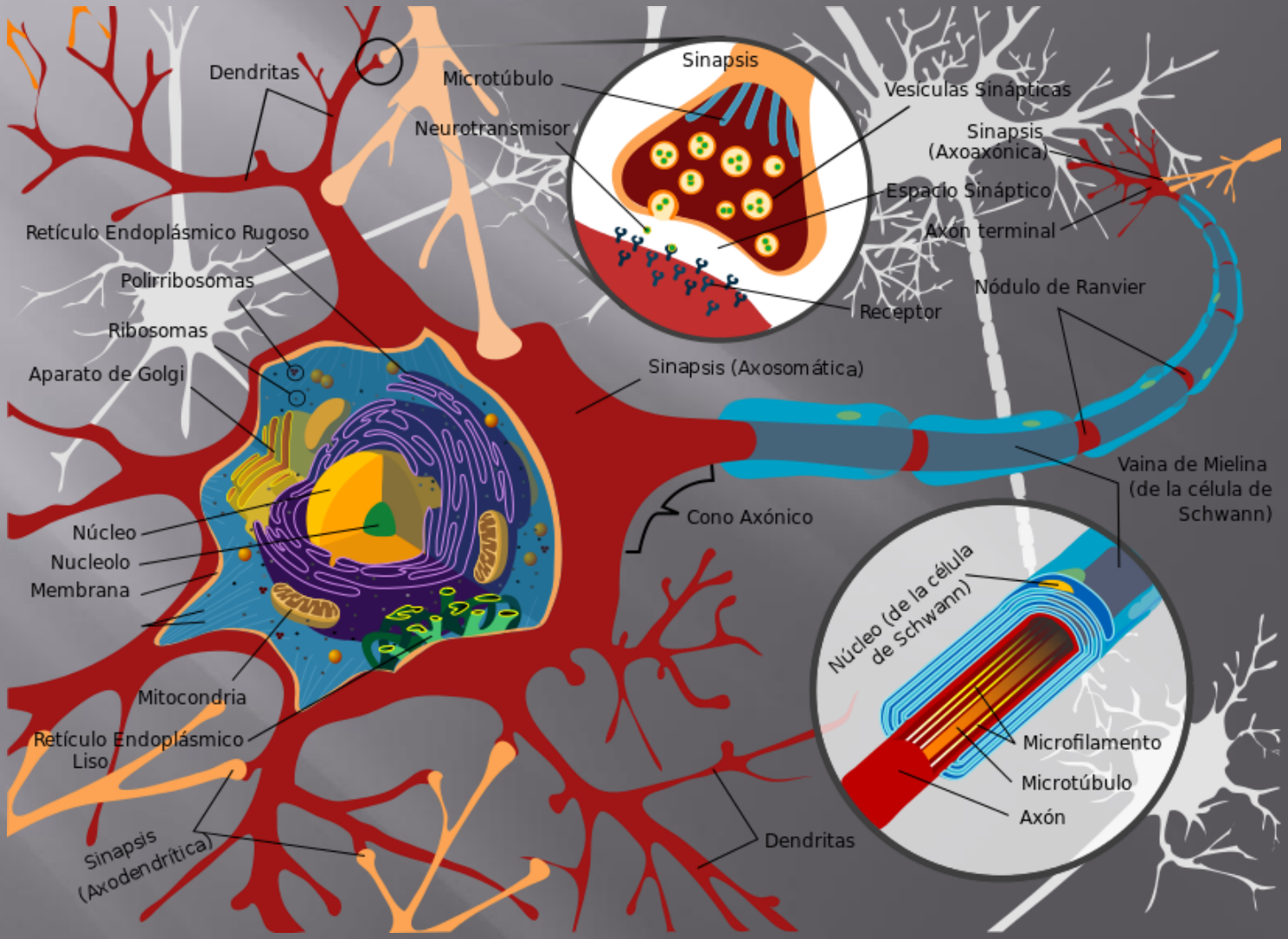
El oído interno

El procesamiento empieza en el oído interno, donde las ondas sonoras se transforman en impulsos eléctricos. La cóclea (también conocida como caracol) está rellena de un líquido que las ondas sonoras mueven y cuyo movimiento es capturado por las células sensoriales que

El cerebro

Una vez que se envían los impulsos al cerebro, este procesa los datos para que podamos seleccionar lo que es relevante en esa situación y seguirlo.

Las Neuronas



Las Neuronas

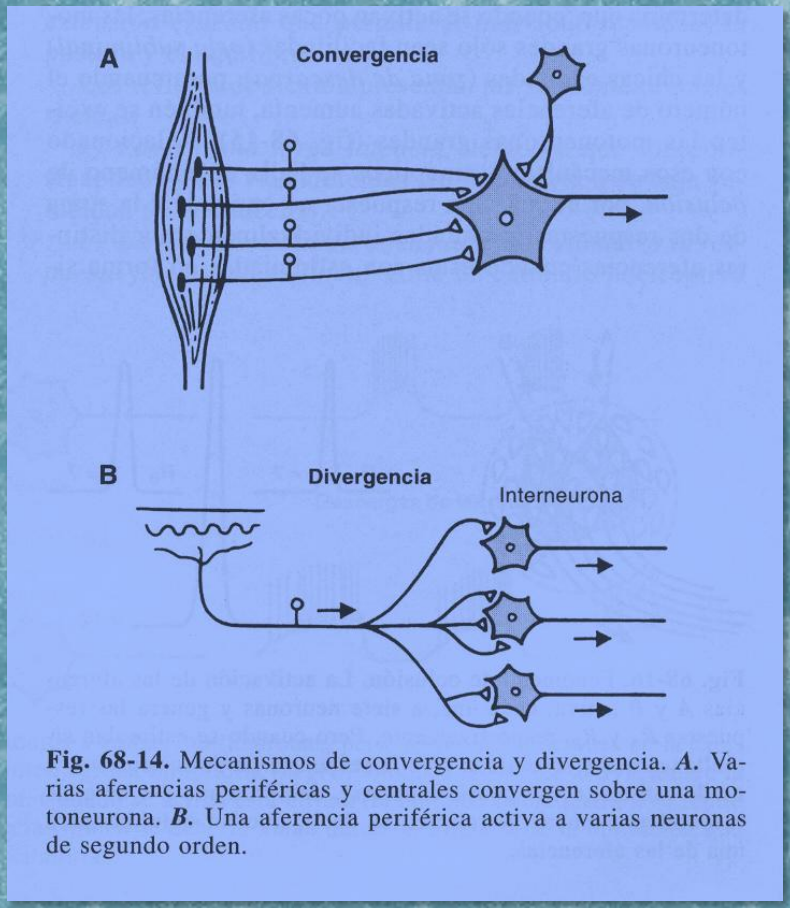
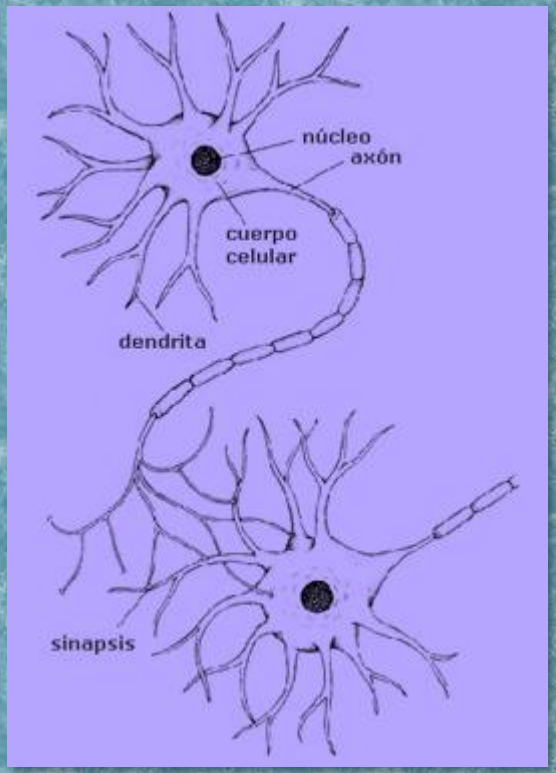
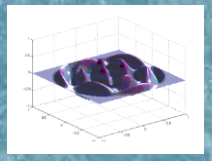


Fig. 68-14. Mecanismos de convergencia y divergencia. ***A.*** Varias aferencias periféricas y centrales convergen sobre una motoneurona. ***B.*** Una aferencia periférica activa a varias neuronas de segundo orden.





Circuitos Reverberantes

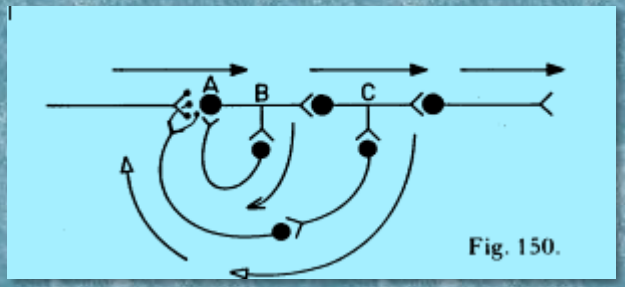


Fig. 150.

Rapidez de ondas sonoras

La rapidez de las ondas sonoras en un medio depende de la compresibilidad y la densidad del medio; si éste es un líquido o un gas y tiene un módulo volumétrico B (véase la sección 12.4) y densidad ρ, la rapidez de las ondas sonoras en dicho medio es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (17.1)$$

La rapidez del sonido también depende de la temperatura del medio. La relación entre la rapidez de la onda y la temperatura del aire, para sonido que viaja a través del aire, es

$$v = (331 \text{ m/s})\sqrt{1 + \frac{T_C}{273°C}}$$

donde 331 m/s es la rapidez del sonido en aire a 0°C y T_C es la temperatura del aire en grados Celsius. Con esta ecuación, uno encuentra que, a 20°C, la rapidez del sonido en el aire es aproximadamente 343 m/s.

Esta información proporciona una forma conveniente de estimar la distancia de una tormenta. Primero cuente el número de segundos entre ver el destello del relámpago y escuchar el trueno. Dividir este tiempo entre 3 da la distancia aproximada al relámpago en kilómetros, porque 343 m/s es aproximadamente $\frac{1}{3}$ km/s.

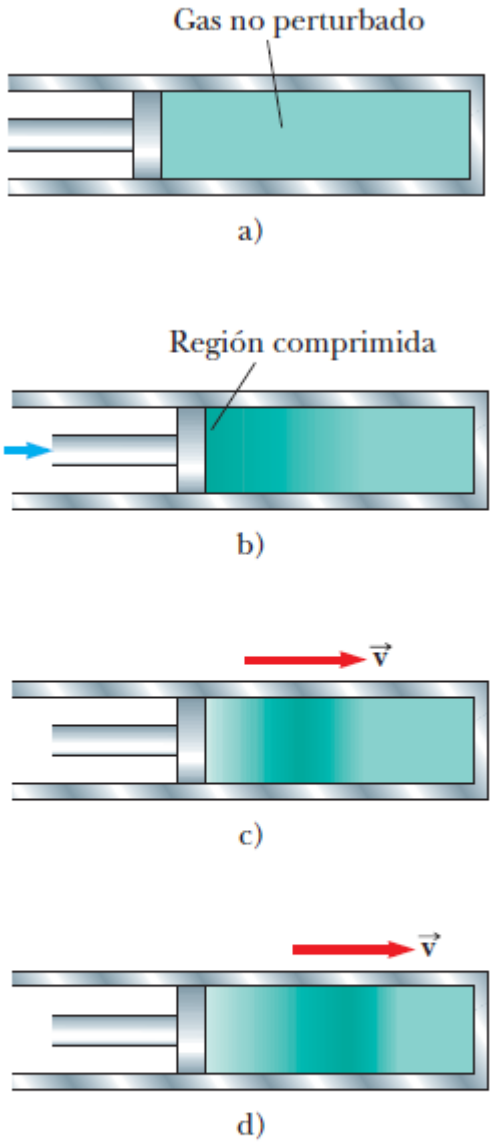


Figura 17.1 Movimiento de un pulso longitudinal a través de un gas compresible. La compresión (región más oscura) la produce el pistón en movimiento.

Rapidez de ondas sonoras

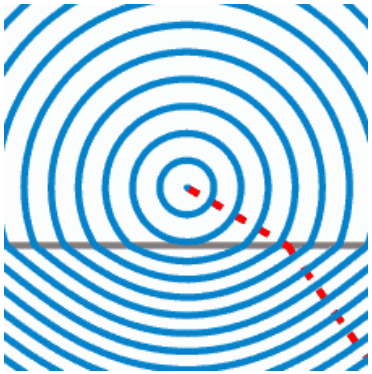
Estado	Medio	Velocidad (m/s)
Gaseoso	Aire (a 20°C)	340
	Hidrógeno (a 0°C)	1286
	Oxigeno (a 0°C)	317
	Helio (a 0°C)	972
Líquido	Agua (a 25°C)	1493
	Agua de mar (a 25°C)	1533
Sólido	Aluminio	5100
	Cobre	3560
	Hierro	5130
	Plomo	1322
	Caucho	54

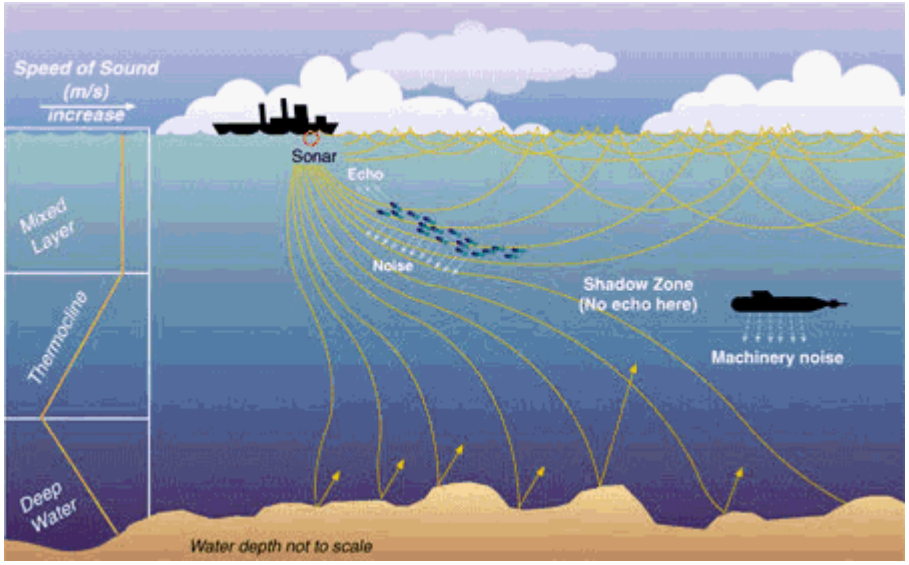
TABLA 17.1

Rapidez del sonido en diferentes medios

Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)
Gases		**Líquidos a 25°C**		**Sólidos**[a]	
Hidrógeno (0°C)	1 286	Glicerol	1 904	Vidrio Pyrex	5 640
Helio (0°C)	972	Agua de mar	1 533	Hierro	5 950
Aire (20°C)	343	Agua	1 493	Aluminio	6 420
Aire (0°C)	331	Mercurio	1 450	Latón	4 700
Oxígeno (0°C)	317	Queroseno	1 324	Cobre	5 010
		Alcohol metílico	1 143	Oro	3 240
		Tetracloruro de carbono	926	Lucita	2 680
				Plomo	1 960
				Caucho	1 600

[a] Los valores conocidos son para propagación de ondas longitudinales en medios volumétricos. Las magnitudes de velocidad para ondas longitudinales en barras delgadas son menores, y las magnitudes de velocidad de ondas transversales en volumen son aún más pequeñas.





En general, la velocidad del sonido es mayor en los sólidos que en los líquidos y en los líquidos es mayor que en los gases. Esto se debe al mayor grado de cohesión que tienen los enlaces atómicos o moleculares conforme más sólida es la materia.

Ondas sonoras periódicas

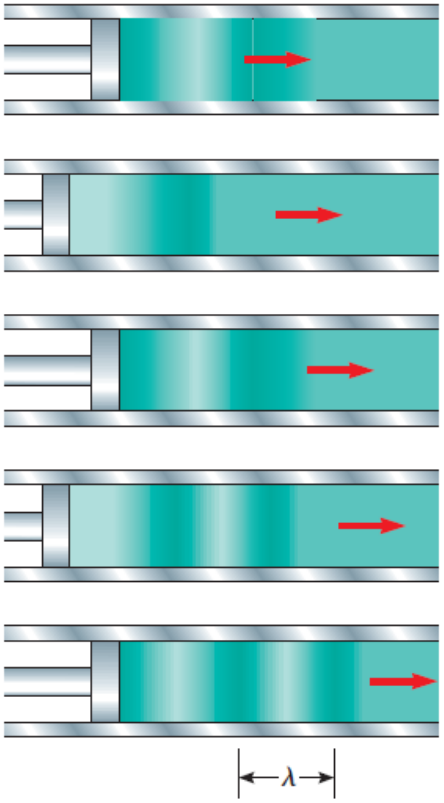


Figura 17.2 Una onda longitudinal que se propaga a través de un tubo lleno de gas. La fuente de la onda es un pistón en oscilación a la izquierda.

A medida que el pistón tiene una oscilación sinusoidal, se establecen continuamente regiones de compresión y enrarecimiento. La distancia entre dos compresiones sucesivas (o dos enrarecimientos sucesivos) iguala la longitud de onda λ de la onda sonora. Mientras estas regiones viajan a través del tubo, cualquier elemento pequeño del medio se mueve con movimiento armónico simple paralelo a la dirección de la onda. Si $s(x, t)$ es la posición de un elemento pequeño en relación con su posición de equilibrio,[1] se puede expresar esta función de posición armónica como

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos (kx - \omega t) \tag{17.2}$$

donde $s_{\text{máx}}$ es la posición máxima del elemento relativo al equilibrio. Con frecuencia, este parámetro se llama **amplitud de desplazamiento** de la onda. El parámetro k es el número de onda, y ω es la frecuencia angular de la onda. Advierta que el desplazamiento del elemento es a lo largo de x, en la dirección de propagación de la onda sonora, lo que significa que se trata de una onda longitudinal.

La variación en la presión del gas ΔP observada desde el valor de equilibrio también es periódica. Para la función de posición en la ecuación 17.2, ΔP se conoce por

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \operatorname{sen} (kx - \omega t) \tag{17.3}$$

donde **la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$**, que es el cambio máximo en presión desde el valor de equilibrio, se proporciona por

$$\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}} \tag{17.4}$$

La ecuación 17.3 se deduce en el ejemplo 17.1.

[1] En este caso se usa $s(x, t)$ en lugar de $y(x, t)$ porque el desplazamiento de los elementos del medio no es perpendicular a la dirección x.

EJEMPLO 17.1 Deducción de la ecuación 17.3

Obtener la expresión para la variación de presión en una onda sonora conocida por la ecuación 17.3.

SOLUCIÓN

Analizar El elemento de gas tiene un grosor Δx en la dirección horizontal y un área de sección transversal A, de modo que su volumen es $V_i = A\,\Delta x$. Cuando una onda sonora desplaza el elemento, las dos caras planas del disco se mueven a través de diferentes distancias s. El cambio en volumen ΔV del elemento cuando una onda sonora desplaza al elemento es igual a $A\,\Delta s$, donde Δs es la diferencia entre los valores de s entre las dos caras planas del disco.

A partir de la definición de módulo volumétrico (véase la ecuación 12.8), exprese la variación de presión en el elemento de gas como una función de su cambio de volumen:

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i}$$

Sustituya para el volumen inicial y el cambio en volumen del elemento:

$$\Delta P = -B\frac{A\,\Delta s}{A\,\Delta x} = -B\frac{\Delta s}{\Delta x}$$

Permita que el grosor Δx del disco se aproxime a cero de modo que la relación $\Delta s/\Delta x$ se convierta en una derivada parcial:

$$\Delta P = -B\frac{\partial s}{\partial x}$$

Sustituya la función de posición conocida por la ecuación 17.2:

$$\Delta P = -B\frac{\partial}{\partial x}[s_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)] = Bs_{\text{máx}}k\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Use la ecuación 17.1 para expresar el módulo volumétrico como $B = \rho v^2$ y sustituya:

$$\Delta P = \rho v^2 s_{\text{máx}} k\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Aplique la ecuación 16.11 en la forma $k = \omega/v$ y sustituya:

$$\Delta P = \rho v \omega s_{\text{máx}}\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Ya que la función seno tiene un valor máximo de 1, identifique el valor máximo de la variación de presión como $\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}}$ (véase la ecuación 17.4) y sustituya para esta combinación en la expresión previa:

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}}\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

Intensidad de ondas sonoras periódicas

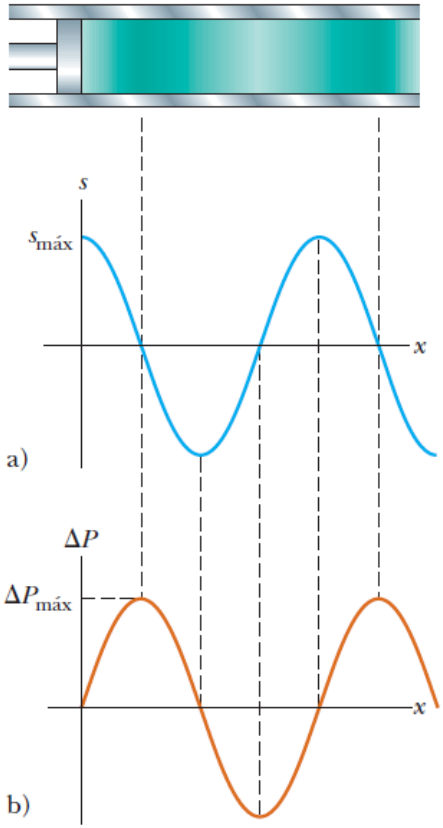


Figura 17.3 a) Amplitud de desplazamiento y b) amplitud de presión en función de la posición para una onda longitudinal sinusoidal.

En el capítulo 16 se demostró que una onda que viaja sobre una cuerda tensa transporta energía. Se aplica el mismo concepto a ondas sonoras. Considere un elemento de aire de masa Δm y longitud Δx enfrente de un pistón de área A que oscila con una frecuencia ω, como se muestra en la figura 17.4. El pistón transmite energía a este elemento de aire en el tubo y la energía se propaga alejándose del pistón mediante la onda sonora. Para evaluar la rapidez de transferencia de energía en la onda sonora, evalúe la energía cinética de este elemento de aire, que se somete a movimiento armónico simple. Un procedimiento similar al de la sección 16.5, donde se evaluó la rapidez de transferencia de energía para una onda sobre una cuerda, muestra que la energía cinética en una longitud de onda de la onda sonora es

$$K_\lambda = \tfrac{1}{4}(\rho A)\omega^2 s_{máx}^2 \lambda$$

Como en el caso de la onda en una cuerda de la sección 16.5, la energía potencial total para una longitud de onda tiene el mismo valor que la energía cinética total; por lo tanto, la energía mecánica total para una longitud de onda es

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \tfrac{1}{2}(\rho A)\omega^2 s_{máx}^2 \lambda$$

A medida que la onda sonora se mueve a través del aire, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado durante un periodo de oscilación. Por tanto, la rapidez de transferencia de energía es

$$\mathcal{P} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\tfrac{1}{2}(\rho A)\omega^2 s_{máx}^2 \lambda}{T} = \tfrac{1}{2}(\rho A)\omega^2 s_{máx}^2 \left(\frac{\lambda}{T}\right) = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_{máx}^2$$

donde v es la rapidez del sonido en el aire. Compare esta expresión con la ecuación 16.21 para una onda sobre una cuerda.

Intensidad de ondas sonoras periódicas

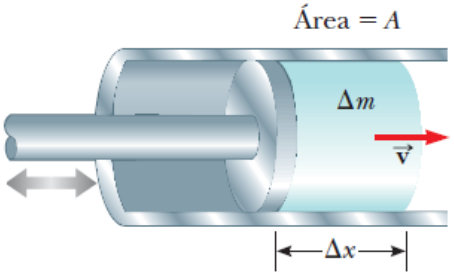


Figura 17.4 Un pistón en oscilación transfiere energía al aire en el tubo, por lo que el elemento de aire de longitud Δx y masa Δm oscila con una amplitud $s_{máx}$.

La **intensidad** I de una onda, o la potencia por cada unidad de área, se define como la rapidez a la cual la energía transportada por la onda se transfiere a través de una unidad de área A perpendicular a la dirección de viaje de la onda:

$$I \equiv \frac{\mathcal{P}}{A} \tag{17.5}$$

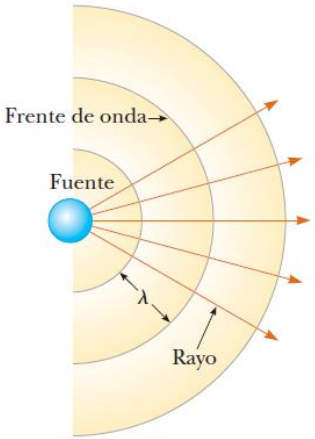
En este caso, la intensidad es, debido a eso,

Intensidad de una onda sonora ▶

$$I = \tfrac{1}{2}\rho v(\omega s_{máx})^2$$

En consecuencia, la intensidad de una onda sonora periódica es proporcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento y al cuadrado de la frecuencia angular. Esta expresión también se puede escribir en términos de la amplitud de presión $\Delta P_{máx}$; en este caso, se usa la ecuación 17.4 para obtener

$$I = \frac{(\Delta P_{máx})^2}{2\rho v} \tag{17.6}$$



La potencia promedio $\mathcal{P}_{prom}$ emitida por la fuente debe tener una distribución uniforme sobre cada frente de onda esférica de área $4\pi r^2$. Por tanto, la intensidad de la onda a una distancia r de la fuente es

$$I = \frac{\mathcal{P}_{prom}}{A} = \frac{\mathcal{P}_{prom}}{4\pi r^2} \tag{17.7}$$

Pregunta rápida 17.2 Una cuerda de guitarra que vibra hace muy poco sonido si no está montada en el cuerpo de una guitarra. ¿Por qué el sonido tiene mayor intensidad si la cuerda se une al cuerpo de la guitarra? a) La cuerda vibra con más energía. b) La energía deja la guitarra a mayor rapidez. c) La potencia del sonido se dispersa sobre un área más grande en la posición del escucha. d) La potencia del sonido se concentra en un área más pequeña en la posición del escucha. e) La rapidez del sonido es mayor en el material del cuerpo de la guitarra. f) Ninguna de estas respuestas es correcta.

EJEMPLO 17.2 Límites auditivos

Los sonidos más débiles que el oído humano puede detectar a una frecuencia de 1 000 Hz corresponden a una intensidad de aproximadamente $1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$, que se llama *umbral de audición*. Los sonidos más fuertes que el oído tolera a esta frecuencia corresponden a una intensidad de aproximadamente $1.00\ \text{W/m}^2$, el *umbral de dolor*. Determine la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento asociadas con estos dos límites.

SOLUCIÓN

Analizar Para hallar la amplitud de presión en el umbral de audición, use la ecuación 17.6 y considere que la rapidez de las ondas sonoras en el aire es $v = 343\ \text{m/s}$ y la densidad del aire es $\rho = 1.20\ \text{kg/m}^3$:

$$\begin{aligned}\Delta P_{\text{máx}} &= \sqrt{2\rho v I} \\ &= \sqrt{2(1.20\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})(1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2)} \\ &= 2.87 \times 10^{-5}\ \text{N/m}^2\end{aligned}$$

Calcule la correspondiente amplitud de desplazamiento con la ecuación 17.4, y recuerde que $\omega = 2\pi f$ (ecuación 16.9):

$$\begin{aligned}s_{\text{máx}} &= \frac{\Delta P_{\text{máx}}}{\rho v \omega} = \frac{2.87 \times 10^{-5}\ \text{N/m}^2}{(1.20\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})(2\pi \times 1\,000\ \text{Hz})} \\ &= 1.11 \times 10^{-11}\ \text{m}\end{aligned}$$

De manera similar, uno encuentra que los sonidos más fuertes que puede tolerar el oído humano corresponden a una amplitud de presión de $28.7\ \text{N/m}^2$ y una amplitud de desplazamiento igual a $1.11 \times 10^{-5}\ \text{m}$.

Finalizar Ya que la presión atmosférica es casi $10^5\ \text{N/m}^2$, ¡el resultado para la amplitud de presión dice que el oído es sensible a fluctuaciones de presión tan pequeñas como 3 partes en 10^{10}! ¡La amplitud de desplazamiento también es un número notablemente pequeño! Si este resultado para $s_{\text{máx}}$ se compara con el tamaño de un átomo (aproximadamente $10^{-10}\ \text{m}$), se ve que el oído es un detector extremadamente sensible de ondas sonoras.

EJEMPLO 17.3 Variaciones de intensidad de una fuente puntual

Una fuente puntual emite ondas sonoras con una salida de potencia promedio de 80.0 W.

A) Encuentre la intensidad a 3.00 m de la fuente.

B) Hallar la distancia a la cual la intensidad del sonido es $1.00 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}$.

SOLUCIÓN

A)

Ya que una fuente puntual emite energía en la forma de ondas esféricas, use la ecuación 17.7 para encontrar la intensidad:

$$I = \frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi r^2} = \frac{80.0\ \text{W}}{4\pi(3.00\ \text{m})^2} = 0.707\ \text{W/m}^2$$

Esta intensidad es cercana al umbral del dolor.

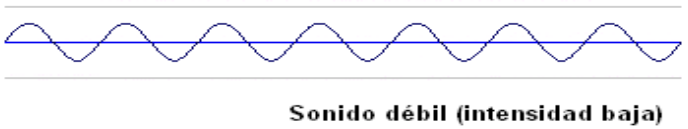
B)

Resuelva para r en la ecuación 17.7 y use el valor conocido para I:

$$r = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{\text{prom}}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80.0\ \text{W}}{4\pi(1.00 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2)}}$$

$$= 2.52 \times 10^{4}\ \text{m}$$

Sonido fuerte (intensidad alta)



Sonido débil (intensidad baja)

Nivel sonoro en decibeles

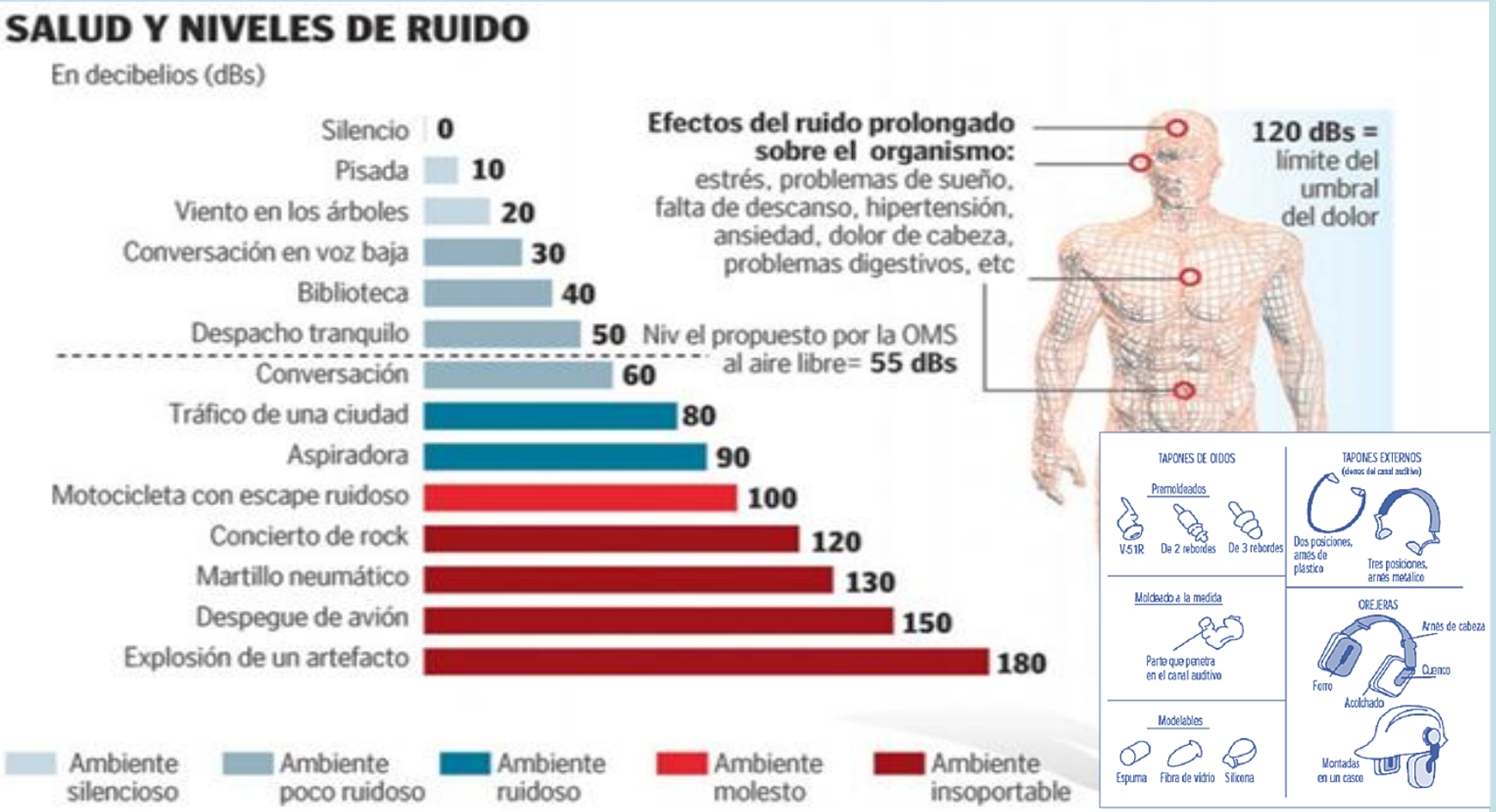
El ejemplo 17.2 ilustra el amplio intervalo de intensidades que puede detectar el oído humano. Ya que este intervalo es tan amplio, es conveniente usar una escala logarítmica, donde el **nivel sonoro** β (letra griega beta) se define mediante la ecuación

Nivel sonoro en decibeles ▶

$$\beta \equiv 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

La constante I_0 es la *intensidad de referencia*, considerada como el umbral de audición ($I_0 = 1.00 \times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$) e I es la intensidad en watts por cada metro cuadrado a la que corresponde el nivel de sonido β, donde β se mide en **decibeles** (dB). En esta escala, el umbral de dolor ($I = 1.00\ \mathrm{W/m^2}$) corresponde a un nivel sonoro de $\beta = 10 \log [(1\ \mathrm{W/m^2})/(10^{-12}\ \mathrm{W/m^2})] = 10 \log (10^{12}) = 120$ dB, y el umbral de audición corresponde a $\beta = 10 \log [(10^{-12}\ \mathrm{W/m^2})/(10^{-12}\ \mathrm{W/m^2})] = 0$ dB.

La unidad *bel* recibe su nombre por el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847–1922). El prefijo *deci–* es el prefijo del SI que representa 10^{-1}.



La exposición prolongada a niveles sonoros altos puede dañar seriamente el oído humano. Siempre que los niveles sonoros superen los 90 dB, se recomienda el uso de tapones de oídos. Evidencia reciente sugiere que la "contaminación acústica" puede ser un factor que contribuye a la presión arterial alta, ansiedad y nerviosismo. La tabla 17.2 presenta algunos niveles sonoros representativos.

EJEMPLO 17.4 Niveles sonoros

Dos máquinas idénticas se colocan a la misma distancia de un trabajador. La intensidad del sonido entregado por cada máquina en funcionamiento en la posición del trabajador es de $2.0 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$.

A) Hallar el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando una máquina está en funcionamiento.

B) Hallar el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando dos máquinas están en funcionamiento:

SOLUCIÓN

A)

Analizar Aplique la ecuación 17.8 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador con una máquina en funcionamiento:

$$\beta_1 = 10 \log \left(\frac{2.0 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}}{1.00 \times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}} \right) = 10 \log (2.0 \times 10^5) = 53\ \mathrm{dB}$$

B)

Aplique la ecuación 17.8 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador, con el doble de intensidad:

$$\beta_2 = 10 \log \left(\frac{4.0 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}}{1.00 \times 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}} \right) = 10 \log (4.0 \times 10^5) = 56\ \mathrm{dB}$$

Sonoridad y frecuencia

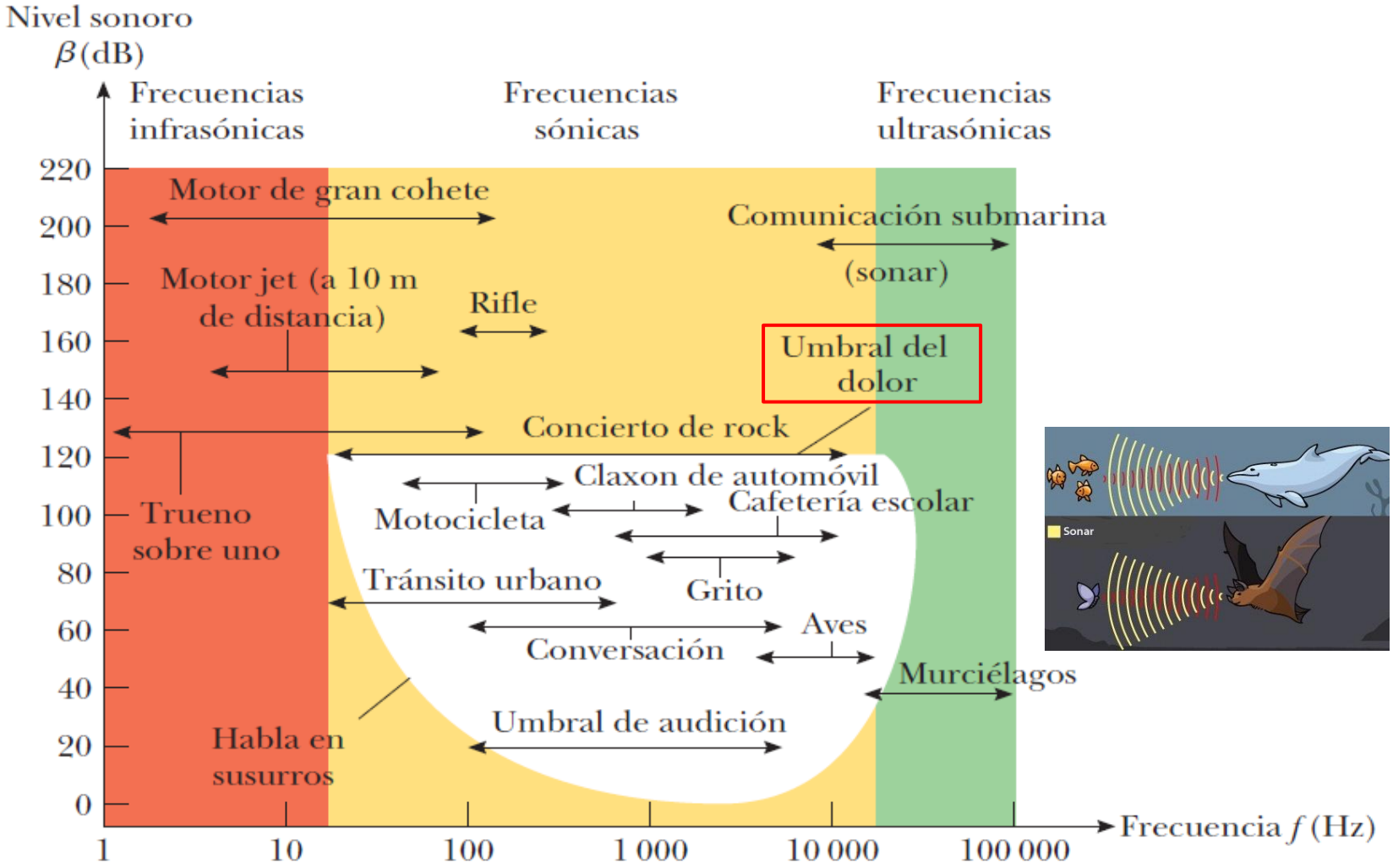


Figura 17.6 Intervalos aproximados de frecuencia y nivel sonoro de varias fuentes y la audición humana normal, que se muestra por el área blanca.

El efecto Doppler

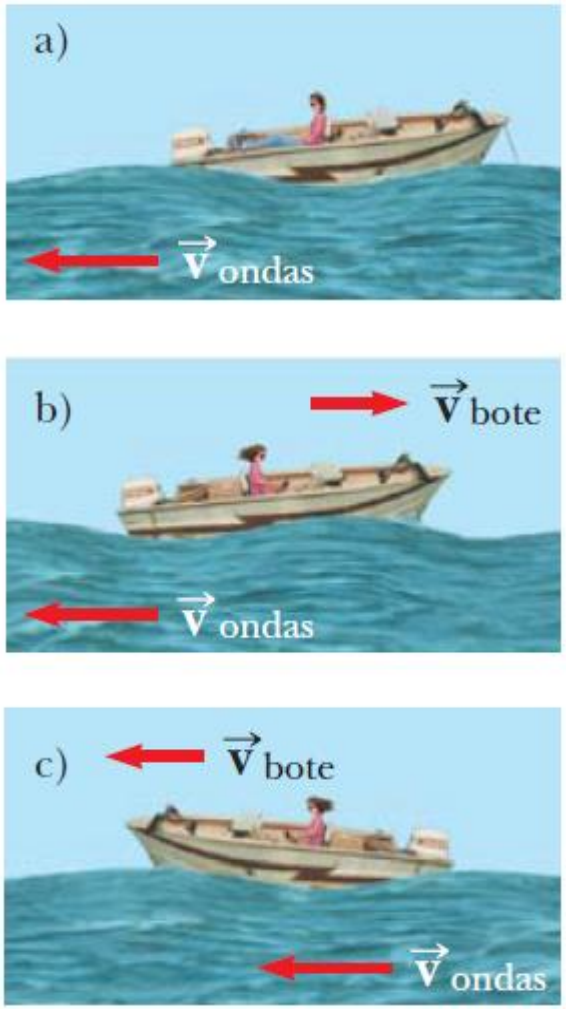
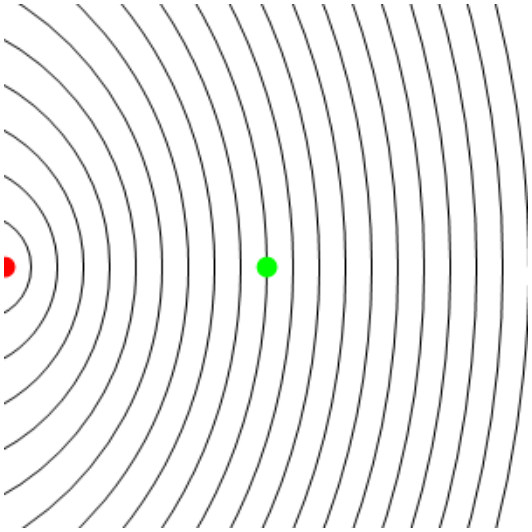


Figura 17.7 a) Ondas que se mueven hacia un bote estable. Las ondas viajan hacia la izquierda y su fuente está lejos hacia la derecha del bote, fuera del marco de la fotografía. b) El bote se mueve hacia la fuente de ondas. c) El bote se mueve alejándose de la fuente de ondas.



Christian Andreas Doppler

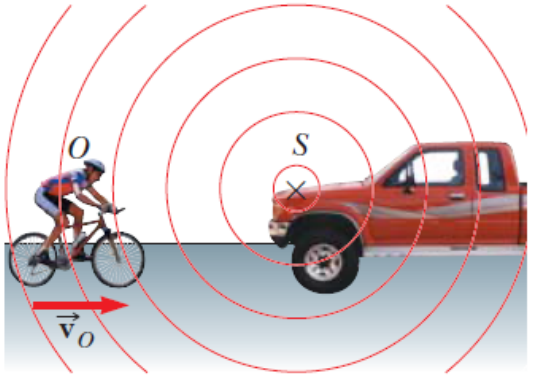


Figura 17.8 Un observador O (el ciclista) se mueve con una rapidez v_0 hacia una fuente puntual estable S, el claxon de una camioneta estacionada. El observador escucha una frecuencia f' mayor que la frecuencia de la fuente.

Llamado en honor del físico austriaco Christian Johann Doppler (1803–1853), quien predijo en 1842 el efecto tanto para ondas sonoras como para ondas luminosas.

El efecto Doppler

Cuando el observador se mueve hacia la fuente, la rapidez de las ondas relativa al observador es $v' = v + v_O$, como en el caso del bote en la figura 17.7, pero la longitud de onda λ no cambia. Por tanto, al usar la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, se puede decir que la frecuencia f' que escucha el observador está *aumentada* y se conoce por

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_O}{\lambda}$$

Ya que $\lambda = v/f$, f' se puede expresar como

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v}\right) f \quad \text{(observador en movimiento hacia la fuente)} \qquad \textbf{(17.9)}$$

Si el observador es móvil alejándose de la fuente, la rapidez de la onda relativa al observador es $v' = v - v_O$. En este caso la frecuencia escuchada por el observador queda *reducida* y se encuentra por

$$f' = \left(\frac{v - v_O}{v}\right) f \quad \text{(observador alejándose de la fuente)} \qquad \textbf{(17.10)}$$

El efecto Doppler

Ahora suponga que la fuente está en movimiento y que el observador queda en reposo. Si la fuente avanza directo hacia el observador A en la figura 17.9a, los frentes de onda escuchados por el observador están más juntos de lo que estarían si la fuente no se moviera. Como resultado, la longitud de onda λ' medida por el observador A es más corta que la longitud de onda λ de la fuente. Durante cada vibración, que dura un intervalo de tiempo T (el periodo), la fuente se mueve una distancia $v_S T = v_S/f$ y la longitud de onda se *acorta* en esta cantidad. Por lo tanto, la longitud de onda observada λ' es

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_S}{f}$$

Como $\lambda = v/f$, la frecuencia f' que escucha el observador A es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - (v_S/f)} = \frac{v}{(v/f) - (v_S/f)}$$

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_S}\right) f \quad \text{(fuente móvil hacia el observador)} \qquad \textbf{(17.11)}$$

Es decir: la frecuencia observada *aumenta* siempre que la fuente se mueva hacia el observador.

Cuando la fuente se aleja de un observador estacionario, como es el caso del observador B en la figura 17.9a, el observador mide una longitud de onda λ' que es *mayor* que λ y escucha una frecuencia *reducida*:

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_S}\right) f \quad \text{(fuente que se aleja del observador)} \qquad \textbf{(17.12)}$$

El efecto Doppler

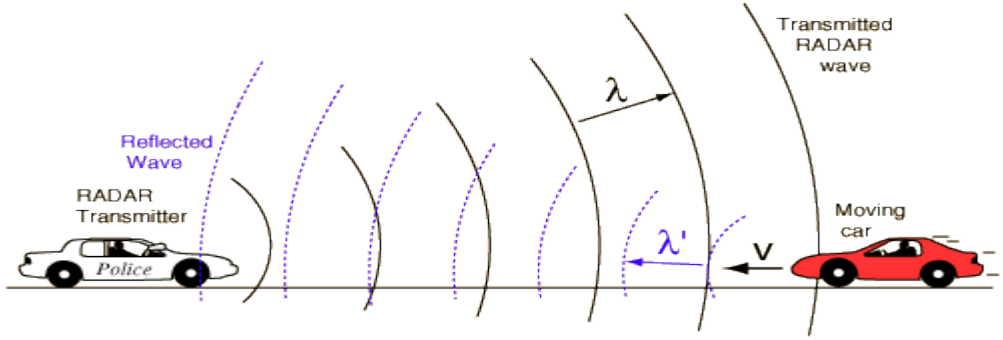
Por último, al combinar las ecuaciones 17.9 y 17.11 se obtiene la siguiente correspondencia general para la frecuencia observada:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

◀ Expresión general de corrimiento Doppler

En esta expresión los signos para los valores sustituidos para v_O y v_S dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo se usa para movimiento del observador o la fuente *hacia* el otro (asociado con un *aumento* en la frecuencia observada), y un valor negativo se usa para movimiento de uno *alejándose* del otro (asociado con una *disminución* en la frecuencia observada).

Aunque el efecto Doppler se experimenta más comúnmente con ondas sonoras, es un fenómeno común a todas las ondas. Por ejemplo, el movimiento relativo de la fuente y el observador produce un corrimiento de frecuencia en las ondas luminosas. El efecto Doppler se usa en los sistemas de radar policiacos para medir la rapidez de los vehículos automotores. Del mismo modo, los astrónomos usan el efecto para determinar la rapidez de estrellas, galaxias y otros objetos celestes en relación con la Tierra.



EJEMPLO 17.5 El radio–reloj descompuesto

Su radio–reloj lo despierta con un sonido estable e irritante de 600 Hz de frecuencia. Una mañana funciona mal y no se puede apagar. Frustrado, arroja el radio–reloj por la ventana de su dormitorio en el cuarto piso, a 15.0 m del suelo. Suponga que la rapidez del sonido es de 343 m/s. Mientras escucha al radio–reloj que cae, ¿qué frecuencia escucha justo antes de que lo oiga chocar con el suelo?

SOLUCIÓN

Analizar Ya que el radio–reloj se modela como una partícula bajo aceleración constante debida a la gravedad, use la ecuación 2.13 para expresar la rapidez de la fuente de sonido:

$$v_S = v_{yi} + a_y t = 0 - gt = -gt$$

Aplique la ecuación 17.13 para determinar la frecuencia de corrimiento Doppler que se escucha del radio–reloj que cae:

$$1) \quad f' = \left[\frac{v + 0}{v - (-gt)}\right] f = \left(\frac{v}{v + gt}\right) f$$

A partir de la ecuación 2.61, hallar el tiempo en el que el reloj golpea el suelo:

$$y_f = y_i + v_{yi} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$-15.0 \text{ m} = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2) t^2$$

$$t = 1.75 \text{ s}$$

De la ecuación 1), evalúe la frecuencia de corrimiento Doppler justo cuando el radio–reloj golpea el suelo:

$$f' = \left[\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + (9.80 \text{ m/s}^2)(1.75 \text{ s})}\right](600 \text{ Hz})$$

$$= 571 \text{ Hz}$$

EJEMPLO

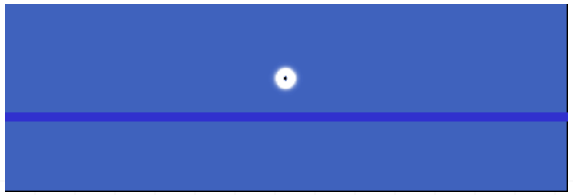
Una campana se toca en el aire emitiendo la nota La universal de 440 Hz. Un buzo se encuentra sumergido en agua a una profundidad de 10 metros. Calcular la frecuencia de la nota que escucha el buzo:

SOLUCIÓN

Suponiendo que el cambio de la velocidad del sonido en el agua con respecto del cambio de presión (dado el aumento de profundidad) sea pequeño, ya que el agua es un medio prácticamente incompresible, por lo que su densidad se mantiene casi constante con la profundidad y con ello las velocidades de desplazamiento molecular relacionadas con la propagación de ondas; entonces la frecuencia que escuchará el buzo será la misma que emitió la campana en el aire, de no ser así, existiría una discontinuidad.

Sin embargo, como la velocidad del sonido en el agua es diferente que en el aire la longitud de la onda si cambiará. Como $\lambda = v\,\nu$, $\Rightarrow \nu = \lambda/v$. Dado que las frecuencias dentro y fuera del agua son las mismas, la relación entre las longitudes de onda estará dada por la expresión:

$$\frac{\lambda_{aire}}{v_{aire}} = \frac{\lambda_{agua}}{v_{agua}}$$

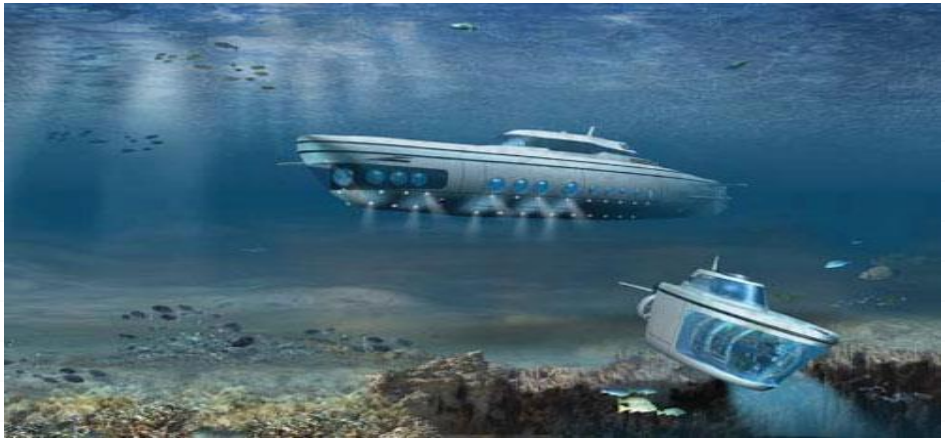


EJEMPLO 17.6 Submarinos Doppler

Un submarino (sub A) viaja a través de agua con una rapidez de 8.00 m/s y emite una onda de sonar con una frecuencia de 1 400 Hz. La rapidez del sonido en el agua es de 1 533 m/s. Un segundo submarino (sub B) se localiza de tal modo que ambos submarinos viajan directamente uno hacia el otro. El segundo submarino se mueve a 9.00 m/s.

A) ¿Qué frecuencia detecta un observador que viaja en el sub B mientras los submarinos se aproximan uno al otro?

B) Los submarinos apenas evitan el choque. ¿Qué frecuencia detecta un observador en el sub B mientras los submarinos se alejan uno del otro?



SOLUCIÓN

A)

Analizar Aplique la ecuación 17.13 para hallar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B y tenga cuidado con los signos de las velocidades de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+8.00 \text{ m/s})}\right](1\,400 \text{ Hz}) = 1\,416 \text{ Hz}$$

B)

Use la ecuación 17.13 para hallar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B, y de nuevo tenga cuidado con los signos de las velocidades de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (-9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (-8.00 \text{ m/s})}\right](1\,400 \text{ Hz}) = 1\,385 \text{ Hz}$$

EJEMPLO

Una ambulancia detenida emite un tono de Sol con una frecuencia de 792 Hz. Calcular la frecuencia de los tonos que se escuchan cuando se acerca y cuando se aleja la ambulancia a una velocidad de 120 Km/h:

SOLUCIÓN

Cuando la fuente sonora está móvil hacia un observador estacionario, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda, ya que la fuente está viajando tras las ondas que se aproximan, y por lo tanto, las crestas se juntan más entre si. Si la frecuencia de la fuente es ν y su velocidad es v_s, entonces en cada vibración viaja una distancia v_s/ν, y cada longitud de onda se acorta en esta cantidad. De aquí que la longitud de onda del sonido que llega al observador no sea $\lambda = v/\nu$ sino $\lambda' = v/\nu - v_s/\nu$. La frecuencia del sonido que el observador oye aumenta y está dada por:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu \frac{v}{v - v_s}$$

En este caso, $\nu = 792$ Hz, la velocidad del sonido en el aire (a 20° C) es $v = 343$ m/s y la velocidad de la fuente es $v_s = 120$ Km/h = 33.333 m/s; así que:

$$\nu' = 792 \text{ Hz} \frac{343 \text{m/s}}{(343 \text{m/s}) - (33.33 \text{m/s})} = 877.25 \text{ Hz}$$

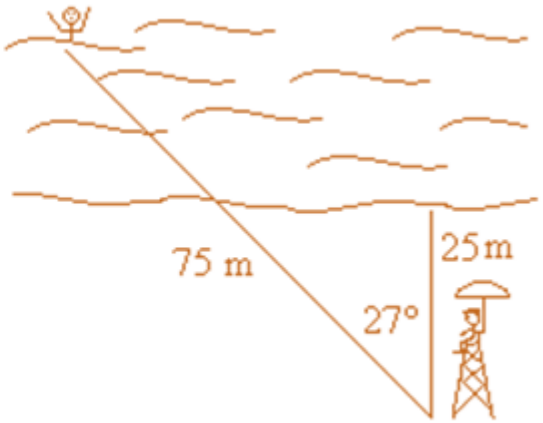
Si la fuente se mueve alejándose del observador, la longitud de onda emitida es v_s/ν mayor que λ, de modo que el observador oye una frecuencia disminuida, es decir:

$$\nu' = \nu \frac{v}{v + v_s}$$

Así que para este caso se tiene que: $\nu' = 792 \text{ Hz} \frac{343 \text{m/s}}{(343 \text{m/s}) + (33.33 \text{m/s})} = 721.849 \text{ Hz}$

EJEMPLO

Problema del salvavidas: un salvavidas se encuentra en la playa, sentado en su silla a una distancia de 25 m del mar. Repentinamente un turista da señales de ahogarse estando a una distancia de 75 m del salvavidas, que forma un ángulo de 27° con la línea que une la silla del salvavidas con el mar. El salvavidas debe correr un tramo de la distancia y nadar otro. El puede correr a 22 Km/h y nadar a 12 Km/h. Calcular la trayectoria que debe seguir para llegar cuanto antes al rescate: (Dar la respuesta en términos vectoriales).



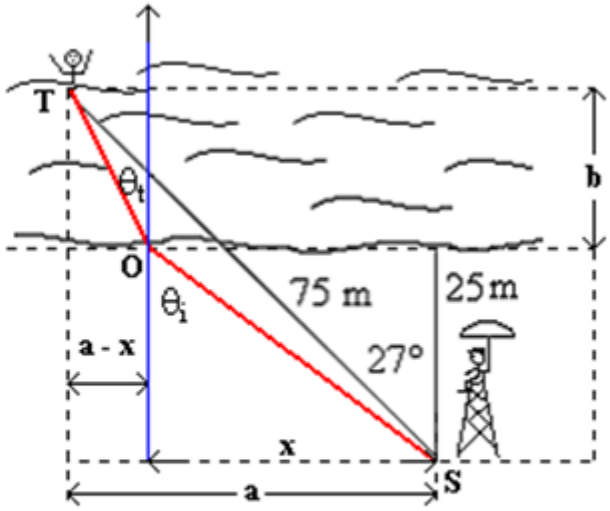
Nota: Fermat fue el primero en plantearse el problema del *tiempo mínimo de recorrido*, en relación a la propagación de la luz.

SOLUCIÓN

Para reducir al mínimo el tiempo de recorrido entre el punto S (salvavidas) y el punto T (turista en problemas), se utiliza como variable auxiliar a x. Es decir, cambiando x se mueve el punto O y se afecta por consiguiente la trayectoria de S a T. De este modo el tiempo de recorrido se podrá expresar como:

$$t = \frac{SO}{v_p} + \frac{OT}{v_m},$$

Donde SO es la magnitud del vector **SO**, que une al punto S con O y OT la magnitud del vector **OT** que une a los puntos O y T.



Las velocidades a las que se puede desplazar el salvavidas en la playa y en el mar son $v_p = 22$ Km/h y $v_m = 12$ Km/h respectivamente.

Con estos datos y tomando en cuenta el diagrama se puede escribir la fórmula para el tiempo de recorrido como:

$$t = \frac{\sqrt{(25\text{m})^2 + x^2}}{22\text{Km/h}} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{12\text{Km/h}}$$

Para minimizar t(x) con respecto a las variaciones en x, se establece que dt/dx = 0; es decir.

$$dt/dx = \frac{x}{(22\text{Km/h})\sqrt{(25\text{m})^2 + x^2}} + \frac{-(a-x)}{(12\text{Km/h})\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0$$

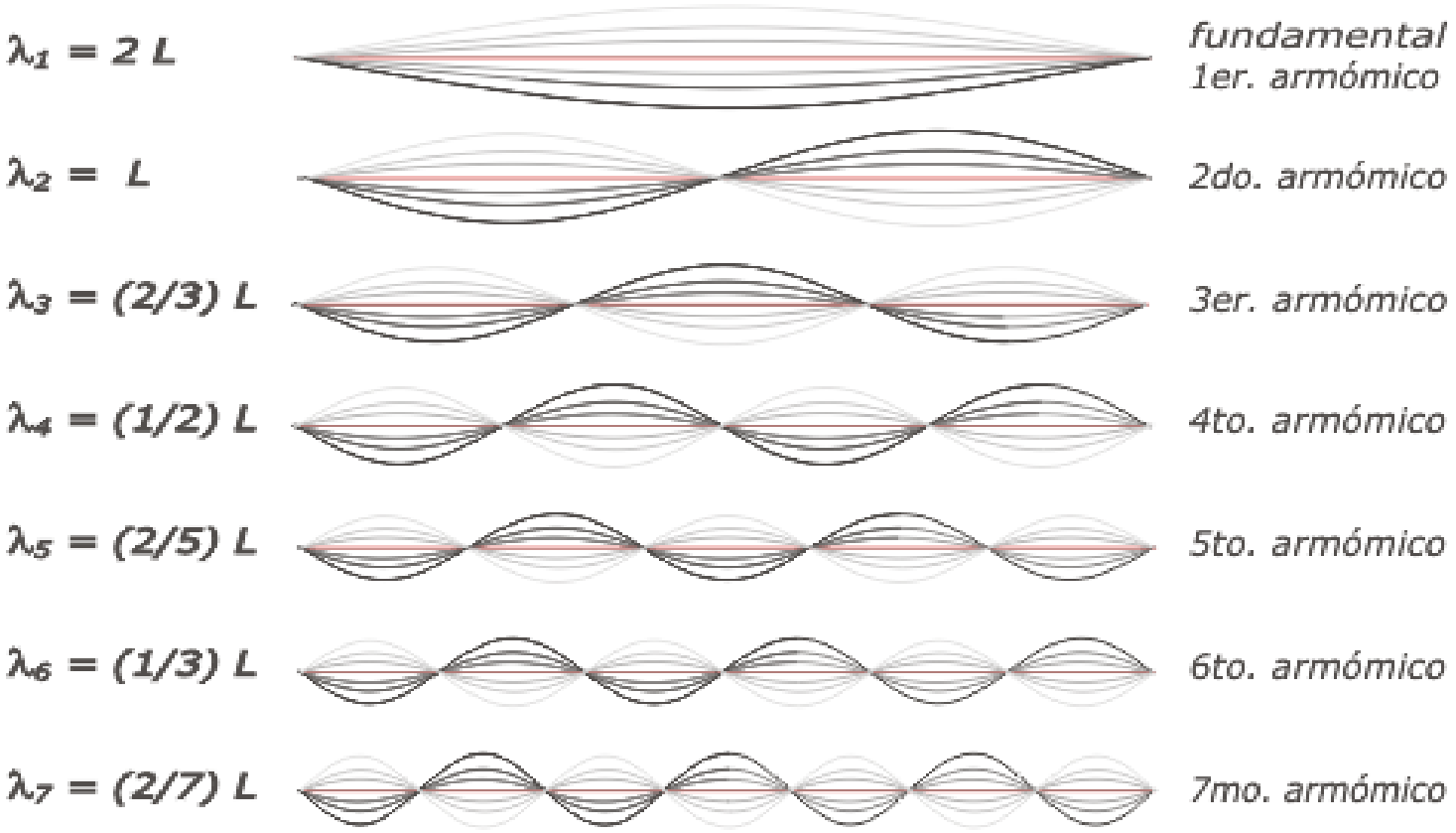
Despejando la x y sustituyendo el valor encontrado en la ecuación para t se encuentra el tiempo el valor del tiempo mínimo de este recorrido.

Usando el diagrama, se puede rescribir esta expresión como:

$$\frac{\text{Sen}\theta_i}{v_p} = \frac{\text{Sen}\theta_t}{v_m}$$

lo cual es nada más y nada menos, que la Ley de Snell.

Modos de Vibración



$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

◀ Longitudes de onda de modos normales

MODOS NORMALES DE UNA MEMBRANA CIRCULAR

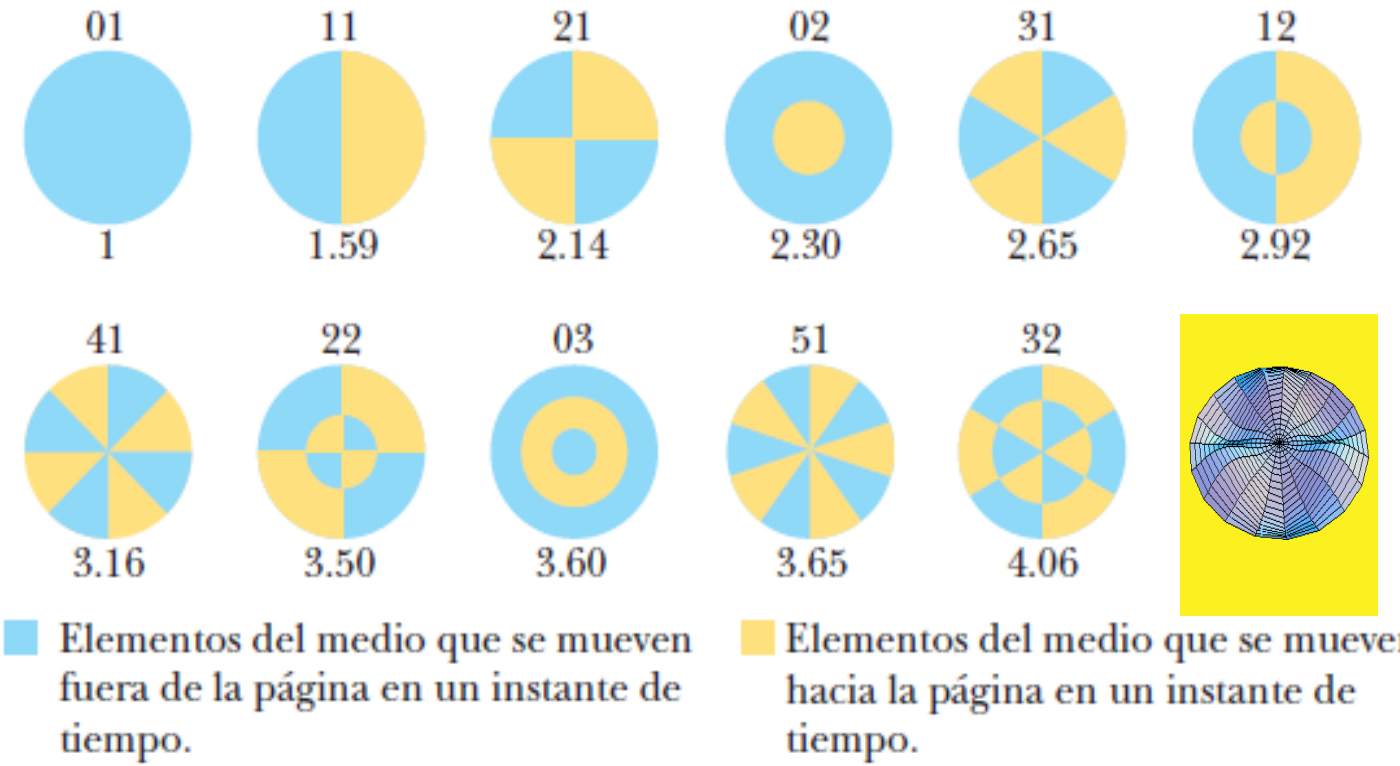
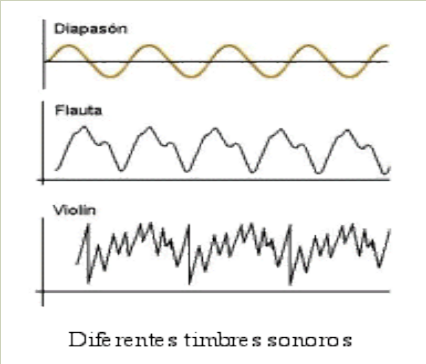


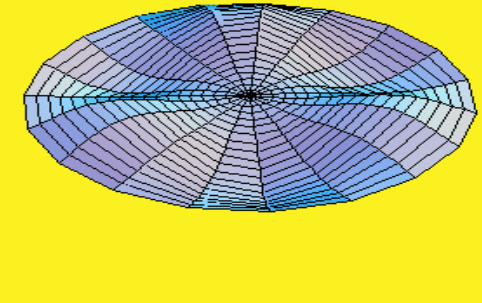
Figura 18.16 Representación de algunos de los posibles modos normales en una membrana circular fija en su perímetro. El par de números en cada patrón corresponde al número de nodos radiales y al número de nodos circulares, respectivamente.

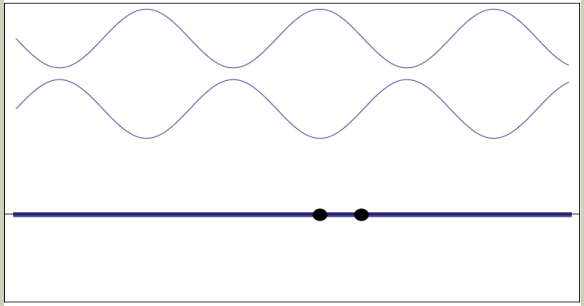
SUPERPOSICIÓN DE ONDAS

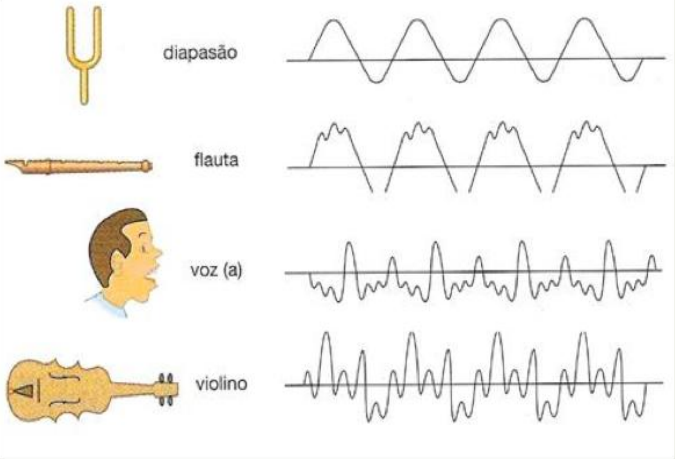
Si dos o más ondas progresivas se mueven a través de un medio, el valor resultante de la función de onda en cualquier punto es la suma algebraica de los valores de las funciones de onda de las ondas individuales.

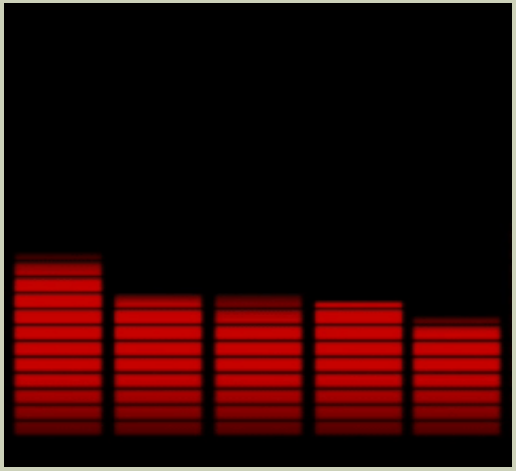


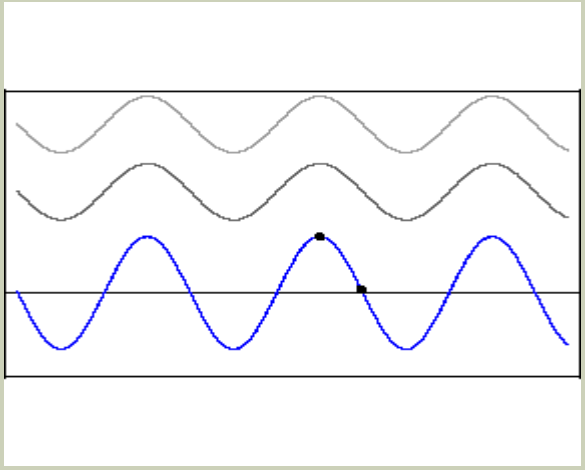
Diferentes timbres sonoros





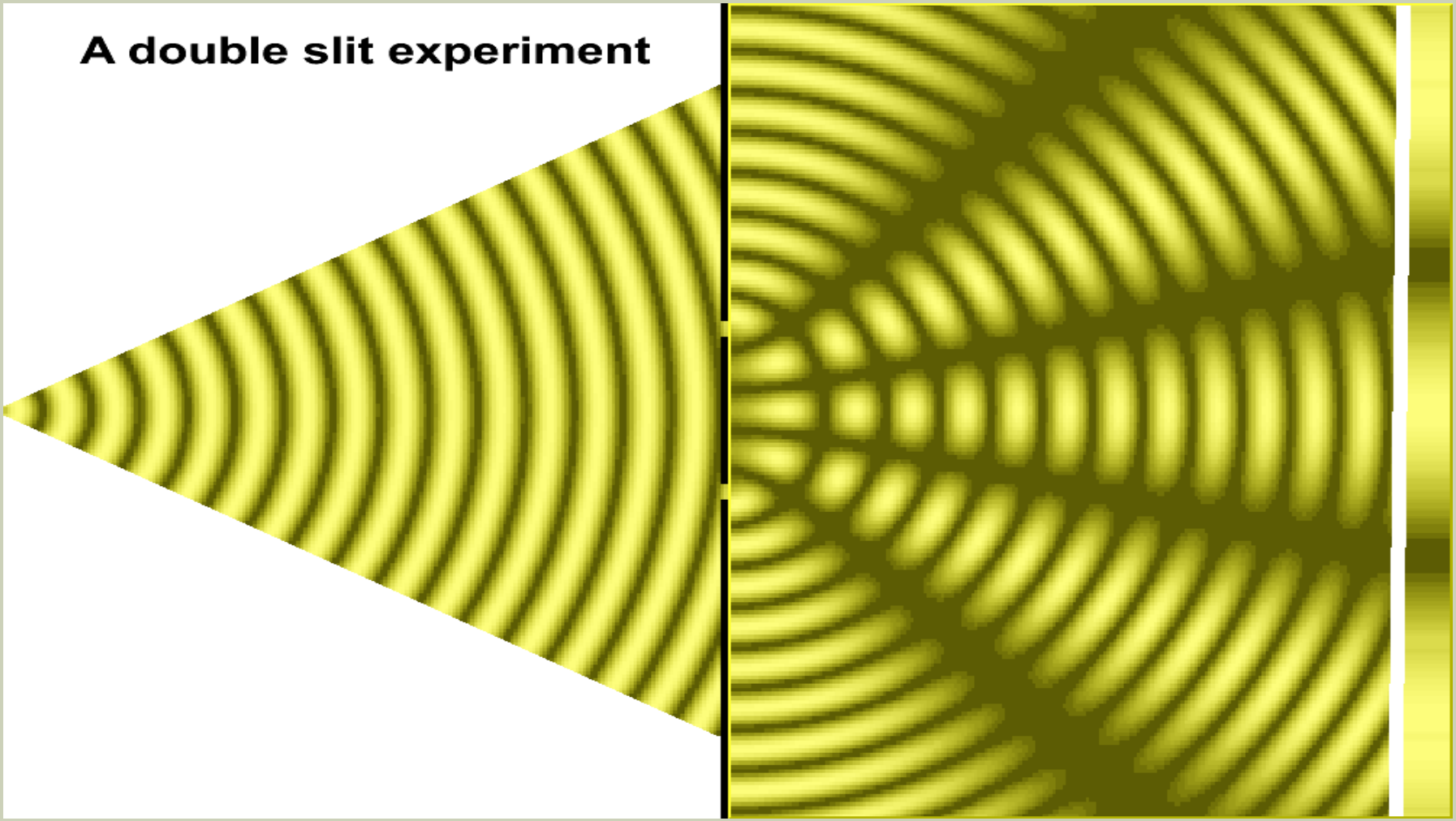




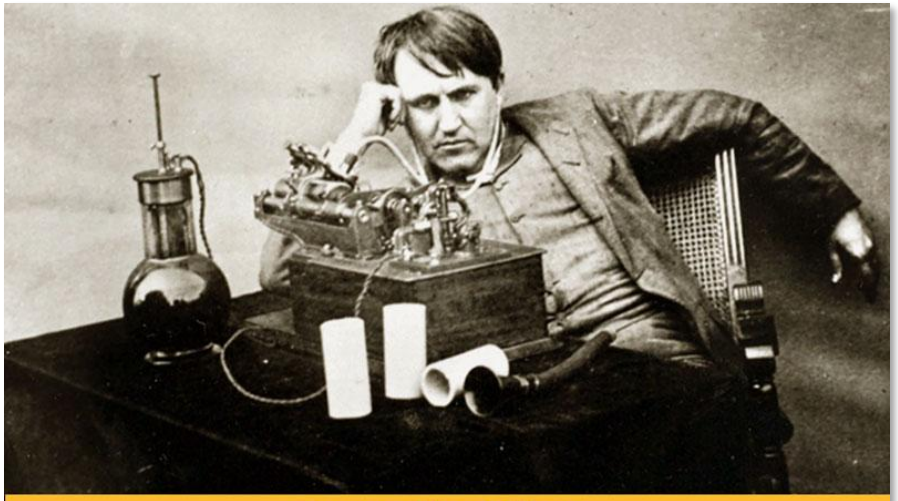


INTERFERENCIA

El experimente de la doble rendija



Grabación de sonido digital



Tomas Alba Edison

El primer dispositivo de grabación de sonido, el fonógrafo, lo inventó Thomas Edison en el siglo XIX. Las ondas sonoras se registraban en los primeros fonógrafos al codificar las formas de onda sonoras como variaciones en la profundidad de un surco continuo cortado en una delgada hoja enrollada alrededor de un cilindro. Durante la reproducción, a medida que una aguja seguía el surco del cilindro rotatorio, la aguja empujaba de atrás para adelante de acuerdo con las ondas sonoras codificadas en el disco. La aguja se unía a un diafragma y una bocina, lo que hacía al sonido lo suficientemente intenso para escucharse.

Grabación digital

En la grabación digital la información se convierte a código binario (unos y ceros), parecido a los puntos y rayas del código Morse.

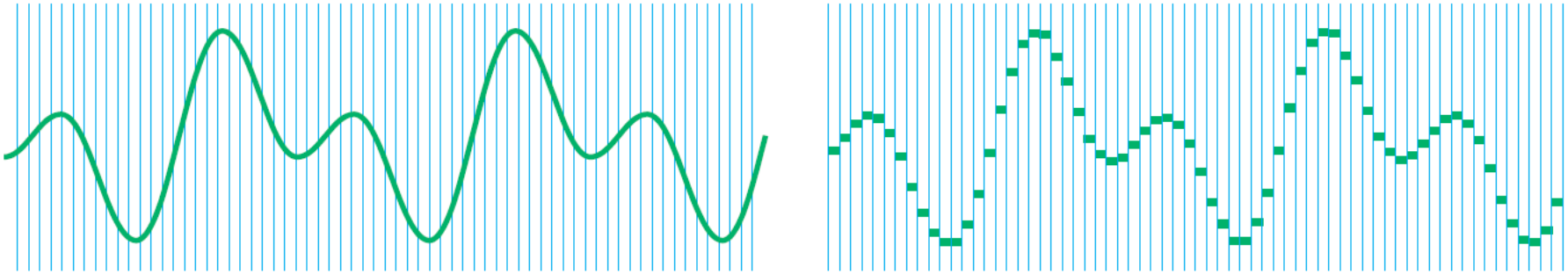


Figura 17.12 a) El sonido se digitaliza mediante el muestreo electrónico de la forma de onda sonora a intervalos periódicos. Durante cada intervalo de tiempo entre las líneas azules, se registra un número para el voltaje promedio durante el intervalo. La proporción de muestreo que se presenta aquí es mucho más lenta que la proporción de muestreo real de 44 100 muestras por segundo. b) Reconstrucción de la onda sonora muestreada en a). Advierta la reconstrucción escalonada en lugar de la forma de onda continua en a).

Números binarios de muestra

Número en base 10	Número en binario	Suma
1	0000000000000001	1
2	0000000000000010	2 + 0
3	0000000000000011	2 + 1
10	0000000000001010	8 + 0 + 2 + 0
37	0000000000100101	32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1
275	0000000100010011	256 + 0 + 0 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1

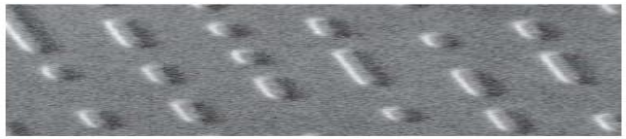


Figura 17.13 Superficie de un disco compacto que muestra las depresiones. Las transiciones entre depresiones y partes planas corresponden a unos binarios. Las regiones sin transiciones corresponden a ceros binarios.

Resumen

DEFINICIONES

La **intensidad** de una onda sonora periódica, que es la potencia por cada unidad de área, es

$$I \equiv \frac{\mathcal{P}}{A} = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \qquad \textbf{(17.5, 17.6)}$$

El **nivel sonoro** de una onda sonora en decibeles es

$$\beta \equiv 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \textbf{(17.8)}$$

La constante I_0 es una intensidad de referencia, que usualmente se considera como el umbral de audición ($1.00 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$), e I es la intensidad de la onda sonora en watts por metro cuadrado.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Las ondas sonoras son longitudinales y viajan a través de un medio comprimible con una rapidez que depende de las propiedades elásticas e inerciales de dicho medio. La rapidez del sonido en un líquido o gas que tenga un módulo volumétrico B y densidad ρ es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textbf{(17.1)}$$

Para ondas sonoras sinusoidales, la variación en la posición de un elemento del medio es

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos\,(kx - \omega t) \qquad \textbf{(17.2)}$$

y la variación en presión a partir del valor de equilibrio es

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \operatorname{sen}\,(kx - \omega t) \qquad \textbf{(17.3)}$$

donde $\Delta P_{\text{máx}}$ es la **amplitud de presión**. La onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento. La correspondencia entre $s_{\text{máx}}$ y $\Delta P_{\text{máx}}$ es

$$\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}} \qquad \textbf{(17.4)}$$

El cambio en la frecuencia que escucha un observador siempre que hay movimiento relativo entre una fuente de ondas sonoras y el observador se llama **efecto Doppler**. La frecuencia observada es

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v - v_S}\right) f \qquad \textbf{(17.13)}$$

En esta expresión, los signos para los valores sustituidos para v_O y v_S dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo para la velocidad del observador o fuente se sustituye si la velocidad de uno es hacia el otro, mientras que un valor negativo representa una velocidad de uno alejándose del otro.

En la grabación digital de sonido, la forma de onda sonora se muestrea 44 100 veces por segundo. La presión de la onda por cada muestreo se mide y convierte en número binario. En la reproducción estos números binarios se leen y usan para construir la forma de onda original.

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El **principio de sobreposición** especifica que, cuando dos o más ondas se mueven a través de un medio, el valor de la función de onda resultante es igual a la suma algebraica de los valores de las funciones de onda individuales.

El fenómeno de **batimiento** es la variación periódica en intensidad en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

Las **ondas estacionarias** se forman a partir de la combinación de dos ondas sinusoidales que tienen la misma frecuencia, amplitud y longitud de onda, pero que viajan en direcciones opuestas. La onda estacionaria resultante se describe mediante la función de onda

$$y = (2A \operatorname{sen} kx) \cos \omega t \tag{18.1}$$

Por tanto, la amplitud de la onda estacionaria es $2A$, y la amplitud del movimiento armónico simple de cualquier partícula del medio varía de acuerdo con su posición como $2A \operatorname{sen} kx$. Los puntos de amplitud cero (llamados **nodos**) ocurren en $x = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, 3,...$). Los puntos de amplitud máxima (llamados **antinodos**) ocurren en $x = n\lambda/4$ ($n = 1, 3, 5,...$). Los antinodos adyacentes están separados por una distancia $\lambda/2$. Los nodos adyacentes también están separados por una distancia $\lambda/2$.

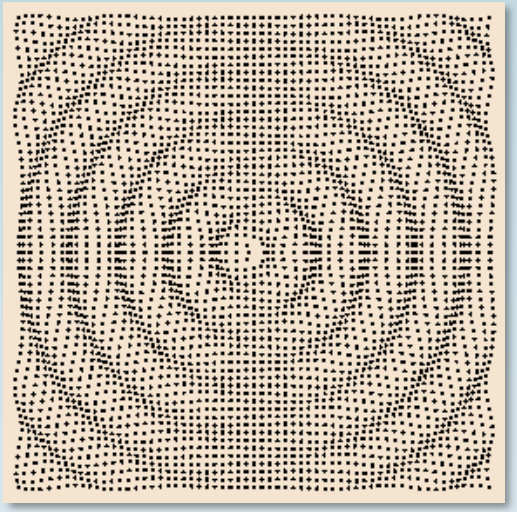
FIN

ANEXO 1

MECÁNICA VECTORIAL

OSCILACIONES Y ONDAS

PARTE 2



Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

Oscilaciones Forzadas

Oscilación estacionaria bajo una fuerza impulsora armónica. Fenómeno de Resonancia.

Hasta aquí hemos agregado a nuestro modelo, de sistema oscilante, la capacidad de disipar energía. Pero aún nos falta incorporar un factor muy importante para la descripción de sistemas físicos reales, la posibilidad de que sobre el sistema se ejerza una fuerza impulsora externa, en principio periódica.

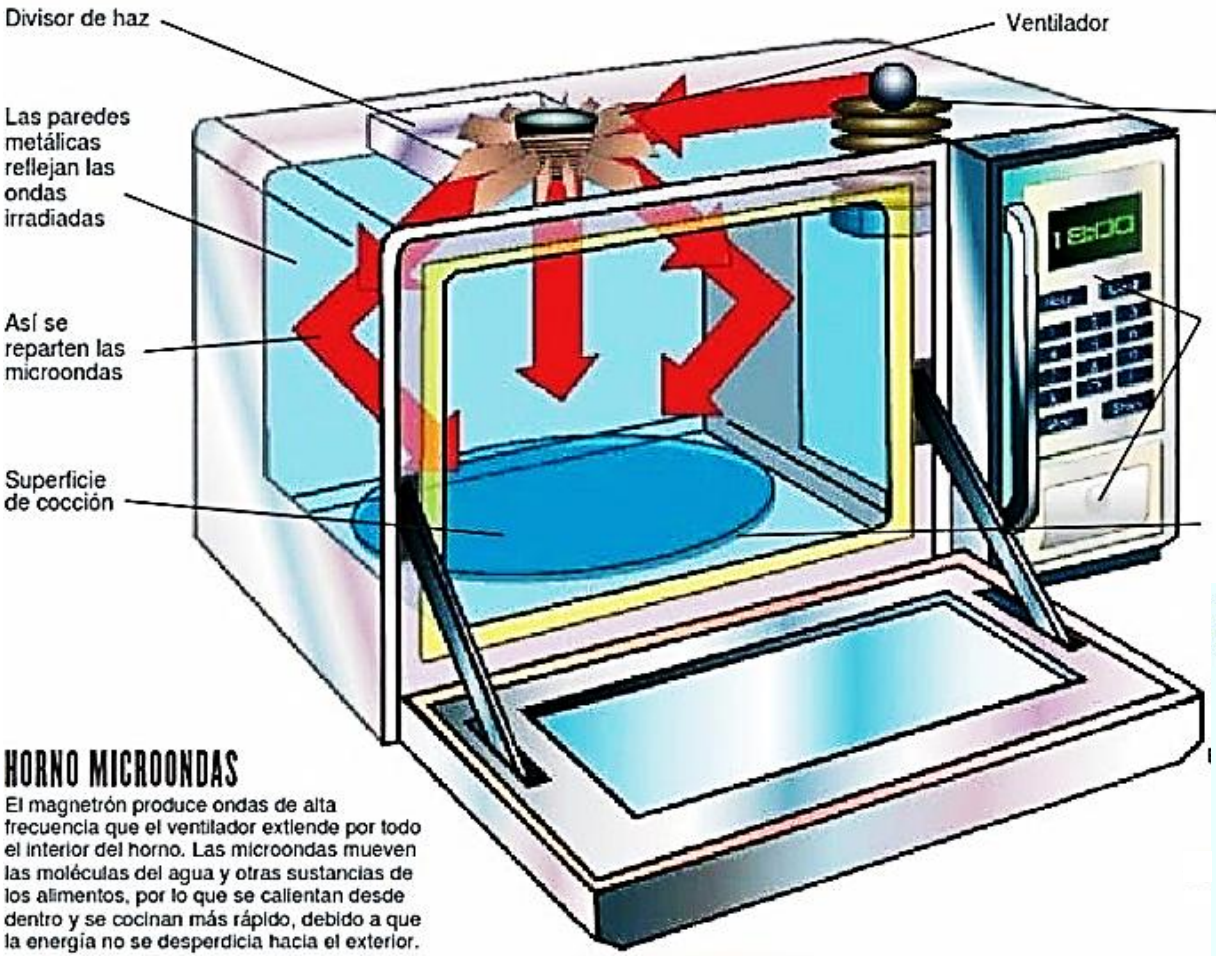
Éste modelo ampliado nos permite entender, por ejemplo, el comportamiento de átomos o moléculas sobre los cuales actúa un campo eléctrico o magnético externo que varía armónicamente (o a una madre hamacando a su hijo).

Un buen ejemplo lo constituye el principio de funcionamiento del horno de microondas. Éste utiliza una onda electromagnética (periódica) para excitar las moléculas del agua y, de esta forma, calentar los alimentos. La frecuencia de microondas concuerda con una de las frecuencias naturales de oscilación de la molécula del agua (***resonancia***), y por ello es que la mayor parte de la energía la absorbe este elemento y no otro (el plato no se calienta por las microondas si no porque está en contacto con el agua caliente).

Este fenómeno ya lo hemos estudiado cualitativamente, es la ***Resonancia***.

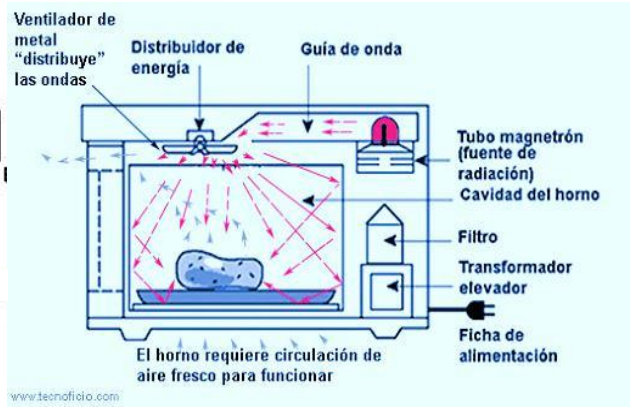
COMO FUNCIONA UN MICROONDAS

A nuestro alrededor, existen ciertas ondas electromagnéticas caracterizadas por su alta frecuencia y que reciben el nombre de microondas. Están presentes en nuestra vida cotidiana y pueden aplicarse dentro de una gran variedad de actividades diversas, entre las que quizá, la forma más conocida sea la del horno de cocina descubierto en los años 40 del siglo XX y que en comparación con el tradicional prepara los alimentos con mayor rapidez. Pero las microondas también se encuentran en otros muchos aparatos, aunque ignoramos su presencia y la importancia que tienen por ejemplo para las comunicaciones.



HORNO MICROONDAS

El magnetrón produce ondas de alta frecuencia que el ventilador extiende por todo el interior del horno. Las microondas mueven las moléculas del agua y otras sustancias de los alimentos, por lo que se calientan desde dentro y se cocinan más rápido, debido a que la energía no se desperdicia hacia el exterior.



Oscilaciones forzadas

Ejemplo: Partimos del modelo planteado en el ejercicio teórico 1, donde analizamos la evolución de una masa, sujeta a un resorte, oscilando unidimensionalmente, amortiguada por su interacción con el aire. Usamos los mismos datos, masa $m = 1kg$, constante elástica del resorte $k = 400N/m$ y longitud relajada $l_0 = 30cm$.

Utilizamos el mismo modelo de amortiguamiento que en el ejercicio teórico 1, donde, la fuerza amortiguadora del aire, F_a la consideramos proporcional a la velocidad del cuerpo, pero en sentido opuesto ya que se opone a su movimiento (ley de Stokes), es decir,

$$\vec{F}_a = -b\,\vec{v} \qquad \textbf{(1)}$$

en donde b es una constante que determina el grado de amortiguación (¿cuales son sus unidades?). Supondremos que el amortiguamiento es menor al crítico (ver ejercicio teórico 1).

Vamos a agregar al modelo anterior la posibilidad de que sobre el sistema se ejerza una fuerza impulsora externa armónica. Suponemos que la masa, además de interactuar con el resorte y con el aire, interactúa con otro sistema. Producto de esta interacción sobre la masa se ejerce una fuerza (fuerza impulsora externa) que varía armónicamente con el tiempo:

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega\, t). \qquad \textbf{(2)}$$

donde F_0 representa la amplitud de la interacción y ω es la frecuencia angular de variación de la fuerza (es posible agregarle una fase inicial, no lo haremos aquí por simplicidad). Supondremos luego que la frecuencia puede variarse según nuestra conveniencia (un ejemplo cotidiano de fuerza periódica, no armónica, lo constituye una

Oscilaciones forzadas

madre hamacando a su hijo, la amplitud y la frecuencia de la interacción son determinadas "por el amor de la madre").

Comentario: La fuerza externa no necesariamente debe ser una fuerza de contacto (la mano de la madre), sino que puede ser debida a un campo eléctrico o magnético externo, que actúa ***a distancia*** *sobre la masa (cargada eléctrica o magnéticamente). De hecho, las fuerzas de contacto pueden describirse a partir de interacciones electromagnéticas y principios cuánticos como el de Pauli (los átomos no se tocan en la forma en que nosotros usamos la palabra tocarse).*

Oscilaciones forzadas

Una vez planteado el modelo del sistema, con sus interacciones, estamos en condiciones de estudiar su evolución dinámica, por ello:

a) A partir de las leyes de Newton obtenga la ecuación diferencial (ecuación dinámica) que describe el desplazamiento de la masa (use **1** y **2**).

Respuesta,

$$m\ddot{\Psi}(t) = -k\Psi(t) - b\dot{\Psi}(t) + F_0\cos(\omega t) \qquad \textbf{(3)}$$

o pasando de miembro y dividiendo por la masa,

$$\ddot{\Psi}(t) + \Gamma\ \dot{\Psi}(t) + {\omega_0}^2\Psi(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \qquad \textbf{(4)}$$

obtenemos una ***ecuación diferencial lineal inhomogénea****, donde* $\Psi(t)$ *representa el desplazamiento de la masa a partir del equilibrio, en función del tiempo, es decir,*

$$\Psi(t) = x(t) - x_{equi} \quad \textit{donde} \quad x_{equi} = l_0\,. \qquad \textbf{(5)}$$

Recordar que,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,{}^{rad}\!/_{seg} \qquad \textbf{(6)}$$

es la frecuencia natural del sistema (frecuencia a la cual oscilaría la masa sin rozamiento y sin fuerza impulsora), y

$$\Gamma = \frac{b}{m} \qquad \textbf{(7)}$$

es el coeficiente de amortiguamiento (ver ejercicio teórico 1).

Oscilaciones forzadas

Una vez obtenida la ecuación dinámica **4**, estamos en condiciones de hallar la función $\Psi(t)$ que describe la evolución del sistema en el tiempo. Apelamos nuevamente a nuestra intuición para proponer una solución de la ecuación diferencial **4**. A partir de nuestra experiencia, podemos intuir que, luego de transcurrido un cierto tiempo, el sistema finalmente termina oscilando armónicamente con la misma frecuencia ω que impone la fuerza impulsora. Por ello proponemos, como solución, a la función,

$$\Psi_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2) \qquad \textbf{(8)}$$

Verifique que la función $\Psi_2(t)$ es una ***solución particular de la ecuación diferencial* 4,** halle los valores de A_2 y δ_2 *(le hemos puesto el subíndice 2 para diferenciarla de la solución que obtuvimos en la ejercicio teórico 1, donde el sistema no es impulsado por una fuerza externa).*

Este paso es matemáticamente simple pero muy tedioso, en una primera lectura no haga la cuenta, pero si analice cuidadosamente el resultado final (ecuaciones 9 y 10) y el comentario que sigue.

Oscilaciones forzadas

Comentario importante: *La función* $\Psi_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$ *representa una oscilación armónica de frecuencia* ω *, amplitud* A_2 *y fase* δ_2*. Note que* ***la frecuencia*** ω *, de oscilación de la masa,* ***resulta igual a la frecuencia de la fuerza impulsora*** *y que la amplitud* A_2 *y la fase* δ_2 ***no dependen de las condiciones iniciales*** *(como ocurría en el caso del resorte libre), sino que se hallan determinadas a partir de las constantes del sistema (masa, constante elástica, amortiguamiento, intensidad y frecuencia de la fuerza impulsora).*

*Esta solución no puede ser la solución general del sistema. Si el resorte ya está en movimiento y se lo trata de impulsar externamente, en los primeros instantes el movimiento no resulta armónico (****estado transitorio****), y sólo después de transcurrido un tiempo, el sistema logra evolucionar armónicamente con la frecuencia impulsora (****estado estacionario****). La evolución inicial del sistema depende fuertemente de las condiciones iniciales, lo cual* ***no*** *se manifiesta en la solución hallada.*

Como ejemplo, piense en la madre hamacando a su hijo. A menos que la frecuencia de la fuerza externa concuerde con la natural del sistema y que tenga mucho cuidado inicialmente al aplicar la fuerza impulsora, con la fase adecuada de tal forma de acompañar el movimiento de la masa, el movimiento inicial no resulta armónico.

Oscilaciones forzadas

En el capítulo 1 (guía teórica 10) estudiamos que la solución general, de una ecuación diferencial inhomogénea, se halla sumando una solución particular ($\Psi_2(t)$) más la solución de la ecuación homogénea asociada. La ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial **4** es,

$$m\,\ddot{\Psi}_1(t) + b\,\dot{\Psi}_1(t) + k\,\Psi_1(t) = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

la cual, concuerda con la ecuación diferencial que estudiamos en la *ejercicio teórico* 1 (ec. **3**), y representa la evolución del sistema sin fuerza impulsora, y su solución es (ver *ejercicio teórico* 1),

$$\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2}\, \cos\left(\omega_1\, t + \delta_1\right) \qquad \text{donde} \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2} \qquad \textbf{(12)}$$

De esta manera, la solución general de la ecuación diferencial **4** (con fuerza impulsora) resulta,

$$\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2}\, \cos\left(\omega_1\, t + \delta_1\right) + A_2 \cos\left(\omega\, t + \delta_2\right) \qquad \textbf{(13)}$$

donde las constantes A_1 y δ_1 ***se hallan a partir de las condiciones iniciales***, mientras que, como ya dijimos, A_2 y δ_2 ***quedan determinadas por las constantes del sistema*** (masa, constante elástica, amortiguamiento, frecuencia impulsora) y no dependen de las condiciones iniciales del sistema.

Verifique que la función $\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$ es solución de la ecuación **4**.

Ayuda: ahórrese el trabajo de derivar, básese en el hecho de que ya sabe que $\Psi_1(t)$ satisface la ecuación **11** *y que $\Psi_2(t)$ satisface la ecuación* **4**, *y demuestre entonces que $\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$ satisface la ecuación* **4**.

Oscilaciones forzadas

Comentario: La solución general de la ecuación diferencial para el oscilador forzado consta de dos partes, la solución ***transitoria*** $\Psi_1(t)$ *y la solución* ***estacionaria*** $\Psi_2(t)$. *Estos nombres provienen del hecho de que transcurrido cierto tiempo, la solución* $\Psi_1(t)$ *(transitoria) se hace despreciable ya que la amplitud decrece exponencialmente con el tiempo (debido al amortiguamiento). De este modo, a largo plazo, sólo queda la solución* $\Psi_2(t)$ *(estacionaria). Esto significa que luego de transcurrido un tiempo corto inicial, el sistema oscila con la frecuencia* ω *a la que lo obliga a oscilar la fuerza externa (*ω *puede ser cualquiera, no necesariamente igual a la frecuencia natural del resorte).*

Las constantes de la solución transitoria dependen de las condiciones iniciales y la frecuencia ω_1 *es muy parecida a la frecuencia natural del resorte (si el amortiguamiento es bajo). Mientras que la amplitud y la fase de la solución estacionaria dependen de la fuerza externa y no de las condiciones iniciales.*

Este fenómeno también es común en circuitos eléctricos donde intervienen bobinas y capacitores. Es sabido que cuando encendemos o apagamos un circuito, como por ejemplo una heladera, la corriente que circula inicialmente puede ser muy superior a la corriente estacionaria que se alcanza una vez terminado el transitorio, hasta 7 veces mayor, por ello los cables deben dimensionarse para soportar corrientes mayores que las necesarias en el estado estacionario (las potencias que se indican en los artefactos, tales como lámparas o amplificadores, son las que consumen en estado estacionario).

Oscilaciones forzadas

Para fijar ideas hallemos $\Psi(t)$, para el caso particular en que el resorte inicialmente está estirado $5cm$ y en reposo, e impulsado por una fuerza externa armónica de intensidad $F_0 = 5N$ y frecuencia $\omega = 25^{rad}/_{seg}$ (recuerde que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20^{rad}/_{seg}$).

Suponga que el coeficiente de rozamiento es $b = 1^{kg}/_{seg}$ ($\Rightarrow \Gamma = \frac{b}{m} = 1^{1}/_{seg}$).

Con estos datos hallamos la solución general del sistema, que sabemos tiene la forma,

$$\Psi(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$$

Primero calculamos la amplitud A_2 y la fase δ_2, que no dependen de las condiciones iniciales,

$$-\pi \le \delta_2 \le 0 \quad y \quad \delta_2 = \text{arctg}\left[\frac{\Gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^{\,2}}\right] \cong -3{,}031$$

(note que debe pasar el resultado al cuarto cuadrante),

y $$A_2 = \frac{F_0}{m}\, \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^{\,2})^2 + \Gamma^2\omega^2}} \cong 0{,}022m = 2{,}2cm$$

Luego (a partir de **12**) calculamos la frecuencia ω_1,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2} \cong \omega_0 = 20^{rad}/_{seg}$$

Oscilaciones forzadas

Planteemos las condiciones iniciales,

$$\Psi(0) = A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2) = 5cm \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 \cos(\delta_1) = 5cm + 2{,}186cm = 7{,}186cm}$$

$$\dot{\Psi}_1(0) = -A_1 \left[\frac{\Gamma}{2} \cos(\delta_1) + \omega_1 \operatorname{sen}(\delta_1)\right] - A_2\omega \operatorname{sen}(\delta_2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A_1 \left[0{,}5\,{}^{1}\!/_{seg} \cos(\delta_1) + 20\,{}^{1}\!/_{seg} \operatorname{sen}(\delta_1)\right] = -A_2\omega \operatorname{sen}(\delta_2) = 6{,}07\,{}^{cm}\!/_{seg}}$$

Hemos obtenido dos ecuaciones con dos incógnitas A_1 y δ_1. Compruebe que despejando se obtiene,

$$A_1 \cong 7{,}187cm \quad \text{y} \quad \delta_1 \cong 0{,}01723$$

Por consiguiente la función que describe la evolución dinámica del sistema es,

$$\Psi(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2} \cos(\omega_1\, t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega\, t + \delta_2)$$

con $A_2 \cong 2{,}2cm$, $\delta_2 \cong -3{,}031$, $\omega = 25\,{}^{rad}\!/_{seg}$, $A_1 \cong 7{,}187cm$, $\delta_1 \cong 0{,}01723$ y $\omega_1 \cong 20\,{}^{rad}\!/_{seg}$.

Oscilaciones forzadas

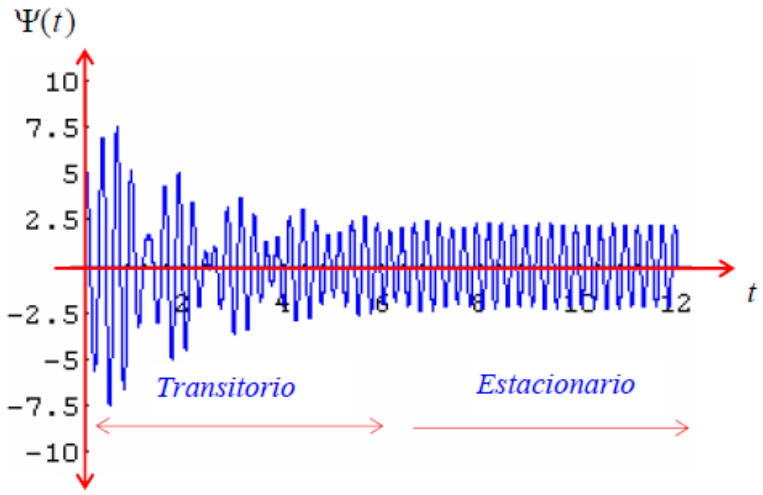


Figura 5: Gráfico de la función Ψ. Estado transitorio y estacionario del sistema.

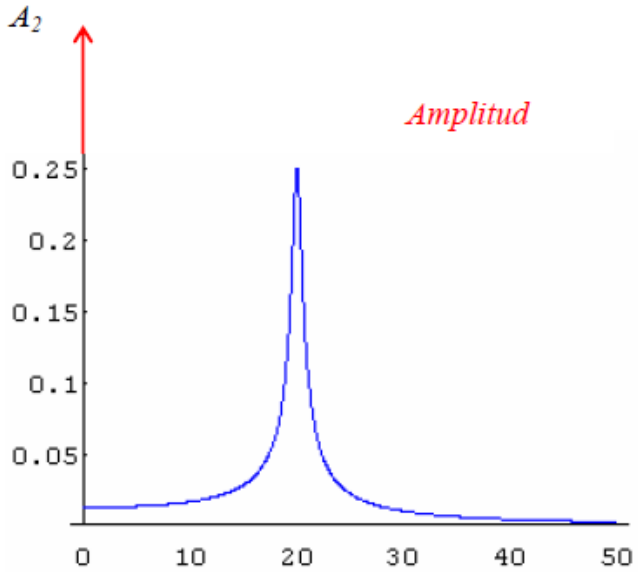
En la figura 5 observamos claramente que, **luego de transcurridos los primeros instantes** (alrededor de $6seg$), **el término transitorio decae completamente y sólo queda el término estacionario**.

En los próximos ítems sólo estudiaremos al sistema cuando ya ha alcanzado el estado estacionario, es decir el transitorio se ha disipado completamente, lo cual ocurre cuando el tiempo transcurrido es mayor que el tiempo de relajación,

$$t >> \tau = \frac{1}{\Gamma} \qquad \textbf{(14)}$$

Oscilaciones forzadas

Importante. Ahora queremos analizar la respuesta del sistema para diferentes frecuencias de la fuerza impulsora (igual intensidad F_0). Para ello, grafique la amplitud de oscilación A_2 y la fase δ_2 en función de la frecuencia impulsora ω, use los datos del ítem anterior. Analice lo que sucede en el límite de $\Gamma \to 0$, ¿sigue siendo bueno el modelo en ese límite? ¿aguanta el resorte? . Discuta.



Oscilaciones forzadas

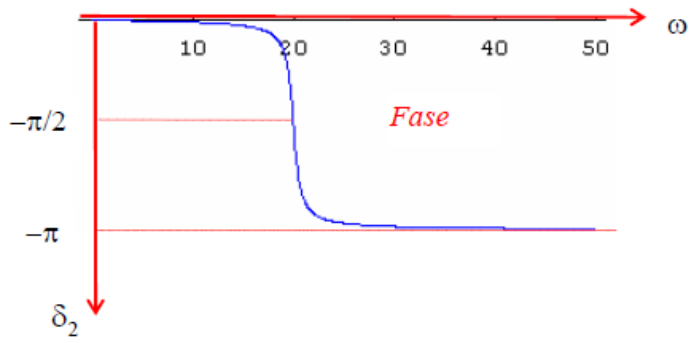


Figura 7: Gráfico de la fase δ_2, en función de la frecuencia impulsora ω.

Note que la oscilación alcanza una mayor amplitud cuando la frecuencia de la fuerza impulsora ω resulta cercana a la frecuencia natural del sistema $\omega_0 = 20^{rad}/_{seg}$, mientras que cuando difiere mucho de esta frecuencia la amplitud disminuye fuertemente, a este fenómeno se lo conoce con el nombre de ***resonancia***.

La frecuencia a la que exactamente aparece el máximo de amplitud es (verifique):

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{\Gamma^2}{2}} \approx \omega_0 \qquad si \qquad \Gamma \ es\ pequeño \qquad \textbf{(15)}$$

Observe también que la fase δ_2 varía abruptamente cerca de la resonancia, y que en resonancia, toma el valor,

$$\delta_2 = -\frac{\pi}{2} \qquad (en\ resonancia). \qquad \textbf{(16)}$$

Oscilaciones forzadas

Comentario: *En el problema* **4** *calcularemos el valor medio de la potencia entregada por la fuerza impulsora, y comprobaremos que el resorte absorbe la mayor cantidad de potencia (trabajo en la unidad de tiempo) cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es exactamente la frecuencia natural del sistema* (***frecuencia de resonancia***),

$$\omega = \omega_0 \qquad \textit{(frecuencia de resonancia)} \qquad \textbf{(17)}$$

El gráfico que obtendremos del valor medio de la potencia entregada por la fuerza impulsora en función de la frecuencia ω *se muestra en la figura 8.*

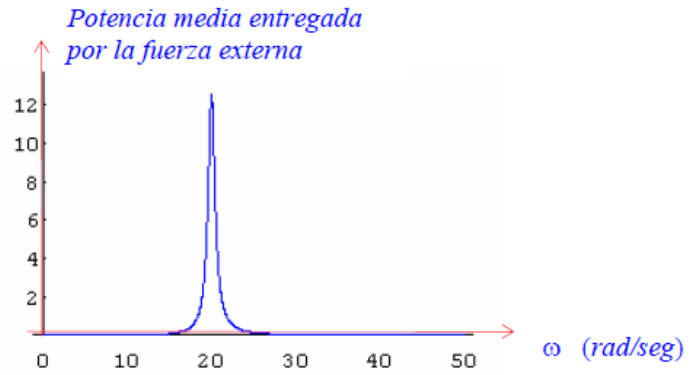


Figura 8: Gráfico de la potencia media entregada por la fuerza externa, en función de la frecuencia ω

donde claramente se observa lo pronunciado del pico de potencia.

El concepto de resonancia se asocia con la existencia de condiciones apropiadas para la transferencia de energía de un sistema a otro.

Oscilaciones forzadas

En nuestro ejemplo de la masa, unida a un resorte, impulsada por una fuerza externa, se logra una mayor transferencia de energía cuando la frecuencia ω *concuerda con la frecuencia natural del sistema* ω_0. *Cuando la fuerza varía armónicamente con esa frecuencia, entrega permanentemente energía al sistema, ya que la fuerza acompaña permanentemente al movimiento de la masa, compensando exactamente la energía disipada por rozamiento.*

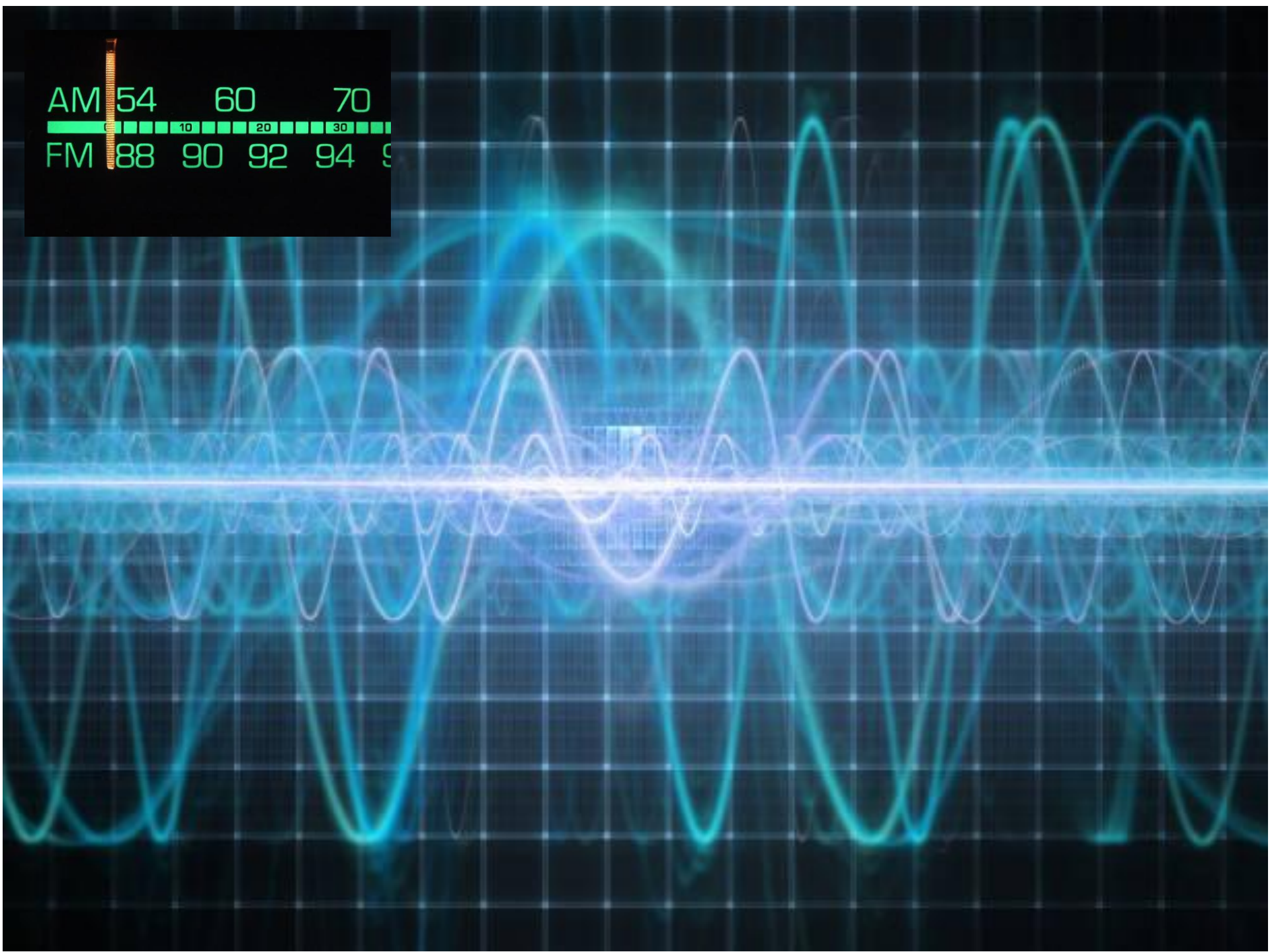
Si la frecuencia ω *no es igual a* ω_0, *no siempre la fuerza externa entrega energía, en algunos momentos puede llegar a oponerse al movimiento de la masa y por ende quitarle energía y en otros momentos acompañar el movimiento entregándole energía.*

Oscilaciones forzadas

Podemos extender el concepto de resonancia a muchos procesos en los cuales hay condiciones favorables para la transferencia de energía de un sistema a otro.

Quizás el ejemplo más familiar de resonancia sea lo que sucede cuando sintonizamos una radio en una determinada estación radioemisora. Todas las estaciones radioemisoras están produciendo todo el tiempo oscilaciones forzadas en el circuito receptor (oscila la corriente eléctrica). Pero, para cada posición del sintonizador, corresponde una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico receptor. Cuando esta frecuencia coincide con aquella de la radio emisora, la energía absorbida es máxima, y por ello es la única estación que podemos oír. Si dos estaciones tienen frecuencias muy próximas, algunas veces las oímos simultáneamente, lo que da lugar a un efecto de interferencia.

La energía que absorbe un átomo de un campo eléctrico oscilante es máxima cuando la frecuencia del campo coincide con una de las frecuencias naturales del átomo. Como por ejemplo el caso del horno microondas, en donde la frecuencia (de microondas) utilizada coincide con una de las frecuencias naturales de vibración de la molécula de agua. Es posible hallar resonancias en reacciones nucleares y en procesos que tienen lugar entre partículas elementales. El concepto de resonancia juega un papel importante en la descripción de muchos fenómenos físicos.


AM 54 60 70
10 20 30
FM 88 90 92 94

Oscilaciones Forzadas y Amortiguadas

Hasta ahora sólo hemos estudiado oscilaciones armónicas unidimensionales en donde no existe disipación de energía.

- Este modelo es el más simple de entender, pero resulta insuficiente para describir fenómenos físicos reales más complejos.
- Una primera mejora a nuestro modelo consiste en considerar que el sistema puede disipar energía, por ejemplo vía el rozamiento, y/o ganar energía a través de la acción de una fuerza impulsora.
- Como primer paso propondremos un modelo simple de disipación de energía y bajo estas nuevas condiciones estudiaremos la evolución dinámica del sistema masa-resorte.
- Luego estudiaremos la respuesta del sistema cuando es sometido a la acción de una fuerza externa cuya intensidad varía armónicamente.

Oscilador armónico amortiguado

Consideramos una masa oscilante, con la posibilidad de que el sistema disipe energía, a través de la fricción con el aire (no tomaremos en cuenta otro tipo de rozamiento).

- Supondremos que las oscilaciones son lo suficientemente lentas como para que el aire al fluir sobre la masa pueda ser descrito como un fluido ideal fluyendo laminarmente, sin turbulencias.

- El más simple de ellos es el que obtenemos a partir de la ley de Stokes, el cual afirma que la fuerza amortiguadora resulta proporcional a la velocidad del cuerpo, pero en sentido opuesto ya que se opone a su movimiento, es decir,

$$\vec{F}_a = -b\,\vec{v}$$

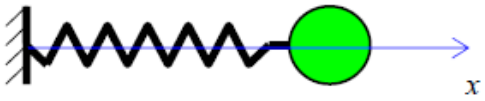
en donde *b* es una constante que determina el grado de amortiguación, depende de la viscosidad del medio y de las dimensiones de la masa.

Este modelo de rozamiento se ajusta bastante bien (para velocidades bajas) a lo que se observa experimentalmente en fluidos.

La fuerza tiene sentido opuesto al sentido del movimiento, por lo cual concluimos ***que el trabajo hecho por esta fuerza resulta siempre negativo***, o sea, ***disipa continuamente energía***.

Ejemplo: Una partícula de masa $m = 1kg$ oscila unidimensionalmente unida a un resorte horizontal de constante elástica $k = 400N/m$, y longitud relajada $l_0 = 30cm$,

Fig.1



Considerando que el sistema disipa energía sólo debido al rozamiento con el aire, y que la fuerza amortiguadora puede modelarse a través de la expresión **1** (ley de Stokes), halle la ley dinámica del sistema (unidimensional), es decir, halle la ecuación diferencial que describe el desplazamiento de la masa (segunda ley de Newton).

Respuesta:

$$m\ \ddot{\Psi}_1(t) = -k\Psi_1(t) - b\dot{\Psi}_1(t) \qquad \textbf{(2)}$$

donde $\Psi_1(t)$ *es el desplazamiento a partir del equilibrio en función del tiempo, es decir* $\Psi_1(t) = x(t) - x_{equi}$ *donde* $x_{equi} = l_0$ *(le hemos puesto el subíndice* 1 *para diferenciar de soluciones que obtendremos posteriormente).*

Podemos reescribir la ecuación **2,** pasando los términos al miembro izquierdo, dividiendo todos los términos por la masa *m* y definiendo dos nuevas constantes, como,

$$\ddot{\Psi}_1(t) + \omega_0{}^2\, \Psi_1(t) + \Gamma\, \dot{\Psi}_1(t) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

donde,

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{o} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,{}^{rad}/_{seg} \qquad (\textit{frecuencia natural}) \qquad \textbf{(4)}$$

y,

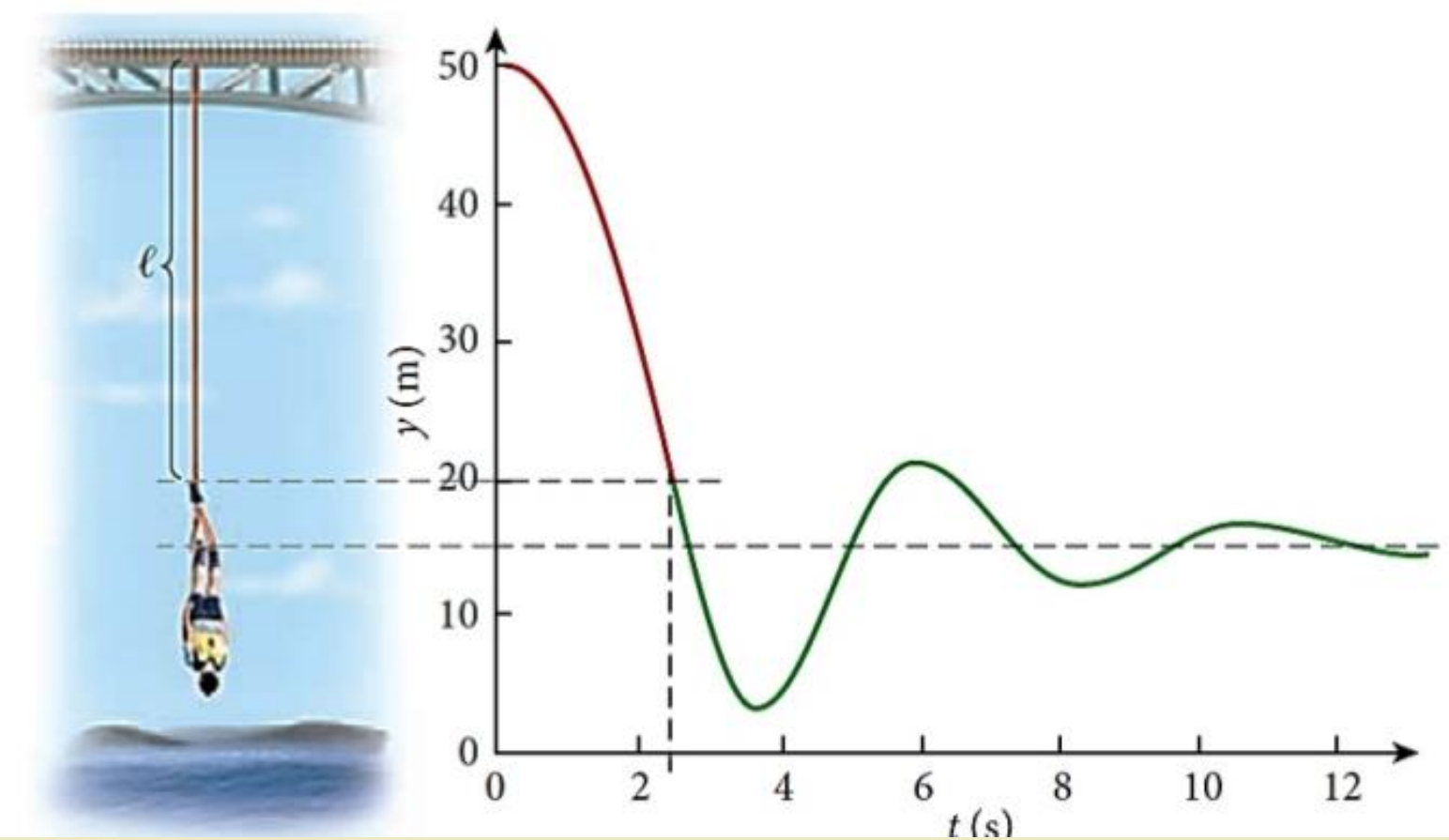
$$\Gamma = \frac{b}{m}, \qquad (\textit{coeficiente de amortiguamiento}) \qquad \textbf{(5)}$$

La constante Γ da cuenta del amortiguamiento del sistema (¿Cuáles son las unidades de Γ ?), mientras que ω_0 resulta ser ***la frecuencia natural del sistema***, es decir, la frecuencia a la que oscila la masa sin rozamiento.

La hemos llamado ω_0 y no ω , como en el capítulo anterior, para que sea más explícito su carácter de constante y porque reservamos el símbolo ω para denominar una frecuencia angular variable.

Dependiendo de lo intenso del amortiguamiento (dado por el coeficiente Γ) tendremos tres posibles soluciones de la ecuación **3** (o **2**), analizaremos caso por caso:

CASO 1: Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado



Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

Primer Caso: Oscilador débilmente amortiguado o subamortiguado: En base a nuestra intuición física, podemos suponer que, si el rozamiento no es muy alto (amortiguamiento b bajo respecto de la constante elástica k), el movimiento continua siendo oscilatorio pero con amplitud decreciente (no periódico). En base a esto, discuta si la siguiente función podría representar la evolución dinámica del sistema, es decir, ser solución de la ecuación diferencial **3** (o **2**),

$$\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\, \cos\left(\omega_1\, t + \delta_1\right) \qquad \textbf{(6)}$$

donde Γ es el coeficiente de amortiguamiento definido en **5**, el cual determina un decaimiento exponencial de la amplitud de oscilación.

La frecuencia angular la hemos notado como ω_1 para diferenciarla de la frecuencia natural del resorte ω_0 (sin disipación), ya que no sabemos de antemano si la frecuencia del sistema concuerda o no con la natural.

*Comentario: Note que la función anterior determina que la oscilación culmina en tiempo infinito, cosa que no ocurre en la realidad. Esto no significa que la función **6** no sea solución de la ecuación diferencial **3**, sino que el modelo de rozamiento es ideal y no describe completamente al sistema real.*

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

a) Haga un gráfico esquemático de la función **6** y estudie detenidamente que determina cada constante.

b) Verifique que la función definida en **6** es solución de la ecuación diferencial **3** (o **2**), y que la frecuencia de oscilación ω_1, del sistema con rozamiento, no resulta igual a la *frecuencia de oscilación natural del sistema* ω_0, sin rozamiento, sino que queda determinada por la relación,

$$\omega_1^{\,2} = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 \qquad \textbf{(7)}$$

La frecuencia ω_1 resulta siempre menor que la frecuencia natural ω_0,

$$\omega_1 < \omega_0$$

y de acuerdo a la ecuación **7,** observamos que la frecuencia ω_1 disminuye su valor al aumentar el amortiguamiento (coeficiente Γ).

La solución **6** tiene sentido mientras que se cumpla que $\omega_1^{\,2} > 0$, o sea,

$$\omega_1^{\,2} = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 > 0 \qquad \textbf{(8)}$$

es decir, ***si el rozamiento es bajo, la solución resulta oscilatoria***.

De la ecuación **8** vemos que si el coeficiente de amortiguación cumple que,

$$\Gamma < 2\omega_0 \qquad \text{o} \qquad b < 2k \qquad \textbf{(9)}$$

entonces consideramos que el rozamiento es bajo.

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

Respuesta: Verificamos que la función $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ *es solución de la ecuación diferencial* **3,** *para ello calculamos su derivada y su derivada segunda, respecto del tiempo (verifique),*

$$\dot{\Psi}_1(t) = -A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\frac{\Gamma}{2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] \qquad \textbf{(10)}$$

$$\ddot{\Psi}_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\left(\frac{\Gamma^2}{4} - {\omega_1}^2\right) \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \Gamma\, \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] \qquad \textbf{(11)}$$

reemplazamos **10** *y* **11** *en la ecuación* **3** $(\ddot{\Psi}_1(t) + {\omega_0}^2\, \Psi_1(t) + \Gamma\, \dot{\Psi}_1(t) = 0)$ *, obtenemos,*

$$A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\left(\frac{\Gamma^2}{4} - {\omega_1}^2\right) \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \Gamma\, \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] +$$

$$+{\omega_0}^2 A_1\, e^{-\Gamma\, t/2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - \Gamma\, A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\left[\frac{\Gamma}{2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_1\, \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1)\right] = 0$$

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

simplificamos la constante A_1 *y el exponente* $e^{-\Gamma t/2}$ *y agrupamos todos los términos con cosenos en el miembro izquierdo y todos los términos con senos en el derecho, obtenemos,*

$$\left(-\omega_1{}^2+\omega_0{}^2-\frac{\Gamma^2}{4}\right)\cos(\omega_1 t+\delta_1)=\left[-\Gamma\,\omega_1+\Gamma\,\omega_1\right]\,\mathrm{sen}(\omega_1 t+\delta_1) \qquad \textbf{(12)}$$

Aquí debemos detenernos a pensar un momento. La función **6** *es solución de la ecuación diferencial* **3** *si la igualdad* **12** *se satisface en todo instante.*

En el miembro izquierdo tenemos una constante multiplicando a una función $\cos(\omega_1 t+\delta_1)$ *mientras que del lado derecho tenemos otra constante distinta multiplicando a una función* $\mathrm{sen}(\omega_1 t+\delta_1)$*, con lo cual la igualdad* **12** *dice que el coseno resulta proporcional al seno y* ***la igualdad debe cumplirse para todo tiempo****, lo cual resulta imposible. Pueden concordar en algún instante pero no para todo tiempo (pensarlo detenidamente).*

La igualdad **12** *sólo puede satisfacerse si las constantes que multiplican a las funciones seno y coseno resultan ambas cero (en este caso la constante que acompaña al seno es evidentemente cero), es decir,*

$$\underbrace{\left(-\omega_1{}^2+\omega_0{}^2-\frac{\Gamma^2}{4}\right)}_{=0}\cos(\omega_1 t+\delta_1)=\underbrace{\left[-\Gamma\,\omega_1+\Gamma\,\omega_1\right]}_{=0}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t+\delta_1) \qquad \textbf{(13)}$$

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

Y de **13** *obtenemos que para que la función* $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ *sea solución de la ecuación* **3** *debe cumplirse que,*

$$-\omega_1{}^2 + \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\omega_1{}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

que es lo que ya habíamos anticipado en **7,** *el sistema oscila con frecuencia* $\omega_1 < \omega_0$.

Resumiendo, si el amortiguamiento es lo suficientemente débil ($\Gamma < 2\omega_0$) *como para que* $\omega_1{}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 > 0$ (***oscilador débilmente amortiguado***), *entonces la evolución del sistema puede ser descripta por la función* $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2}\, \cos(\omega_1 t + \delta_1)$. *Por lo cual el movimiento resulta oscilatorio (no armónico) con frecuencia angular* $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2}$ *(menor que la frecuencia natural* ω_0*), y con amplitud de oscilación que decae exponencialmente, decaimiento regido por el valor del coeficiente de amortiguamiento* Γ.

A este tipo de evolución se le conoce con el nombre de ***oscilador débilmente amortiguado*** *(cuando se cumple que* $\omega_1{}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 > 0$*).*

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

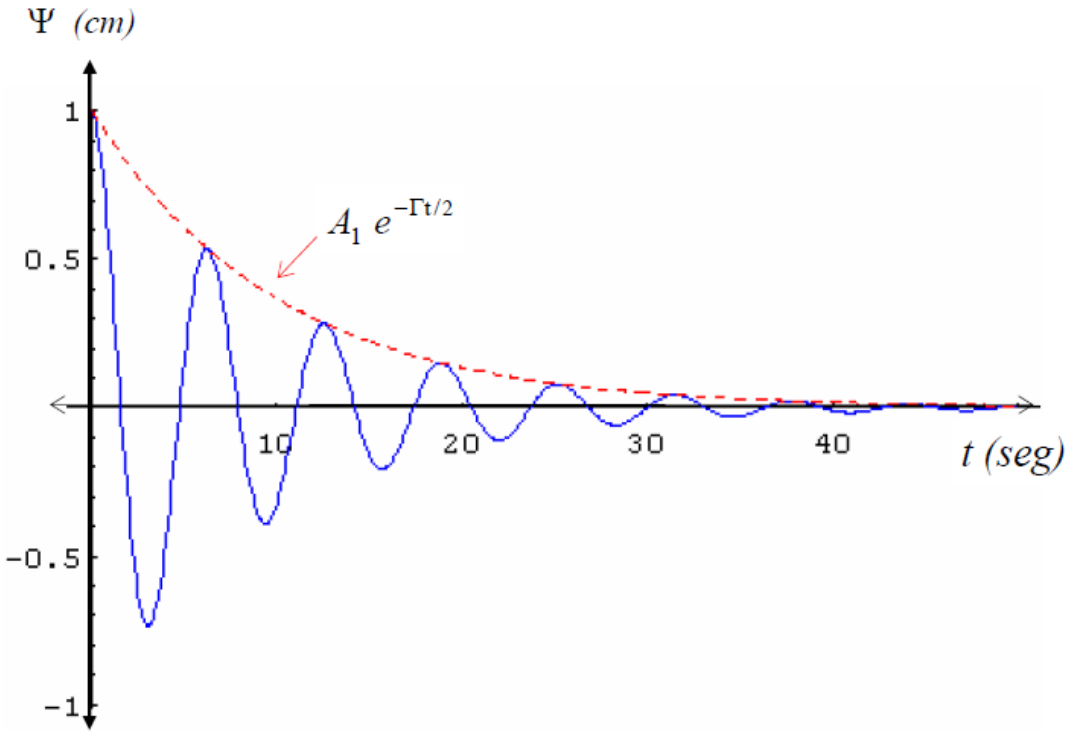


Figura 2: Gráfica de la función $\Psi_1(t) = A_1\ e^{-\Gamma\, t/2}\ \cos\left(\omega_1 t + \delta_1\right)$ (oscilador débilmente amortiguado).

donde hemos tomado los valores, $A_1 = 1cm,\ \delta = 0,\ \Gamma = 0.2\ {}^{1}\!/_{seg}$ y $\omega_0 = 1\ {}^{rad}\!/_{seg}$.

PROBLEMAS OPCIONALES

c) Repita el gráfico, probando con diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento Γ.

d) Suponiendo que el sistema oscila con un período $T_1 = 0{,}32 seg$, calcule el coeficiente de amortiguamiento Γ. *Resp.* $\Gamma \cong 7{,}6\,{}^{1}\!/_{seg}$.

e) *Importante.* Sabiendo que inicialmente la masa parte del reposo desplazada de la posición de equilibrio en $5cm$, halle la ley de movimiento $\Psi_1(t)$. ¡Cuidado, en este caso $5cm$ no es la amplitud A_1, como ocurría en el sistema sin rozamiento! (*debe resolver un sistema de dos ecuaciones en donde las incógnitas son la amplitud y la fase y los datos son las condiciones iniciales*).

Resp. $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ *con* $A_1 \cong 5.09cm$, $\delta_1 \cong -0{,}191$, $\omega_1 \cong 19{,}63\,{}^{rad}\!/_{seg}$ *y* $\Gamma \cong 7{,}6\,{}^{1}\!/_{seg}$

f) Grafique la posición de la masa en función del tiempo.

g) Halle la energía cinética, potencial y mecánica correspondientes a la masa oscilante en función del tiempo.

h) Grafique la energía total en función del tiempo.

i) Demuestre que (*la demostración es optativa, pero la lectura es recomendada*), si el rozamiento es muy bajo $\Gamma << 2\omega_0$, el valor medio de la energía mecánica durante un ciclo de oscilación es aproximadamente,

$$\langle E \rangle \approx \frac{1}{2} m \omega_0{}^2 A_1\, e^{-\Gamma t} = E_0\, e^{-\Gamma t} \qquad \textit{donde} \qquad E_0 = \frac{1}{2} m\, \omega_0{}^2 A_1{}^2 = \frac{1}{2}\, k A_1{}^2 \qquad \textbf{(14)}$$

PROBLEMAS OPCIONALES

es decir, en valor medio la energía del sistema disminuye exponencialmente con el tiempo.

El coeficiente Γ determina el grado de disipación de la energía y además define un tiempo característico del sistema. Este tiempo característico lo podemos definir como,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \qquad \textbf{(15)}$$

(*verifique que* Γ *tiene unidades de* $^{1}/_{seg}$).

Cada vez que transcurre un tiempo τ la energía (en valor medio) disminuye un 63%, como puede comprobarse fácilmente a partir de la ecuación **14** y de una tabla de valores,

a $t = 0$ $\quad \langle E \rangle \approx E_0$

a $t = \tau$ $\quad \langle E \rangle \approx E_0 e^{-\Gamma\tau} = E_0 e^{-\Gamma\,1/\Gamma} = E_0 e^{-1} \cong 0{,}37\,E_0$ *disminuye un* 63%

a $t = 2\tau$ $\quad \langle E \rangle \approx E_0 e^{-\Gamma 2\tau} = E_0 e^{-2} \cong 0{,}37^2\,E_0 \cong 0{,}137\,E_0$ *vuelve a disminuir un* 63%

Note que transcurrido un tiempo igual a 2τ la energía cayo a casi un décimo de la original. Podemos asignar a τ el nombre de tiempo característico de relajación del sistema (al equilibrio), y representa el tiempo en que el sistema disipa un 63% de su energía.

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

Comentario: *Por lo visto, el sistema posee varios tiempos que lo caracterizan (**tiempos característicos del sistema**), uno es el tiempo de relajación* τ, *el otro el período de oscilación del sistema* T_1 *y por último el periodo natural* $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ *(sin disipación). Conociendo* T_1, T_0 *y* τ *resulta posible tener una idea conceptualmente buena de la evolución del sistema.*

Es posible reescribir la condición:

$$\omega_1 < \omega_0 \qquad \text{como} \qquad T_1 > T_0$$

y la condición de rozamiento débil:

$$\Gamma < 2\omega_0 \qquad \text{como} \qquad \tau > \frac{T_0}{4\pi}$$

El decaimiento exponencial $e^{-\Gamma t}$ *puede reescribirse como* $e^{-t/\tau}$.

Muchas de las magnitudes físicas del sistema pueden reescribirse como dependientes de estos tres tiempos.

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

En el ítem anterior se halló que la energía mecánica es,

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} k \Psi^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{\Psi}^2 + {\omega_0}^2 \Psi^2 \right] \qquad \Rightarrow$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m {A_1}^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{\Gamma^2}{4} \cos^2(\omega_1 t + \delta_1) + \Gamma \omega_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1) + {\omega_1}^2 \operatorname{sen}^2(\omega_1 t + \delta_1) + {\omega_0}^2 \cos^2(\omega_1 t + \delta_1) \right]$$

El valor medio de la energía mecánica en un ciclo se calcula como,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} E(t)\, dt \,. \qquad \text{donde} \qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Para calcular el valor medio hacemos una aproximación. Consideramos que el rozamiento es tan bajo $\Gamma << 2\omega_0$ $\left(\text{o } \tau > \frac{T_0}{4\pi}\right)$, *que la exponencial* $e^{-\Gamma t}$ *se mantiene aproximadamente constante durante todo un ciclo de período* T_1, *o sea, el tiempo que dura una oscilación resulta mucho menor que el tiempo de relajación* $T_1 << \tau$ *y, por consiguiente, la exponencial* $e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau}$ *casi no cambia su valor.*

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

Dentro de esta aproximación, resulta posible extraer la exponencial $e^{-\Gamma t}$ *fuera de la integral, es decir,*

$$\langle E \rangle \approx \frac{1}{2} m A_1^{\,2} e^{-\Gamma t} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \left[\frac{\Gamma^2}{4} \cos^2(\omega_1 t + \delta_1) + \Gamma \omega_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1) \right.$$

$$\left. + \omega_1^{\,2} \operatorname{sen}^2(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_0^{\,2} \cos^2(\omega_1 t + \delta_1) \right] dt$$

A partir de esta aproximación, resulta simple hallar el valor medio recordando que,

$$\left\langle \cos^2(\omega_1 t + \delta_1) \right\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \left\langle \operatorname{sen}^2(\omega_1 t + \delta_1) \right\rangle = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \left\langle \cos(\omega_1 t + \delta_1) \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1) \right\rangle = 0$$

Con lo cual, el valor medio de la energía resulta,

$$\langle E \rangle \approx \frac{1}{2} m \omega_0^{\,2} A_1^{\,2} \, \mathrm{e}^{-\Gamma t} = E_0 \, \mathrm{e}^{-\Gamma t}$$

donde $E_0 = \frac{1}{2} m \, \omega_0^{\,2} A_1^{\,2} = \frac{1}{2} k A_1^{\,2}$ *(compare con la energía en el sistema sin disipación).*

PROBLEMA OPCIONAL

Halle la variación ΔE, del valor medio de la energía en cada ciclo, en la aproximación de bajo rozamiento. ¿Se mantiene constante el ΔE en los diferentes ciclos?.

Resp. $\Delta E = E_0\left(e^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma(t+T_1)}\right) = E_0 e^{-\Gamma t}\left(1 - e^{-\Gamma T_1}\right) \approx \langle E\rangle \Gamma T_1 = \langle E\rangle \dfrac{T_1}{\tau}$ *(aproximamos desarrollando a primer orden en Taylor, ya que en ésta aproximación* $T_1 << \tau$*)*

Oscilador debilmente amortiguado o subamortiguado

Definición importante. Se define comúnmente en ingeniería un coeficiente llamado factor Q, que da cuenta del grado de disipación del sistema, como,

$$Q = 2\pi \langle E \rangle / \Delta E \qquad \textbf{(16)}$$

donde ΔE es la energía perdida por período (calculada en el ítem anterior). ***Cuanto mayor resulta Q significa que el sistema disipa una menor fracción de su energía en cada período***. Luego veremos que este factor da cuenta del ancho de banda en sistemas resonantes (ejemplo: receptores de radio).

Demuestre que el factor Q vale aproximadamente (con rozamiento bajo),

$$Q \approx \omega_1 / \Gamma = 2\pi \frac{\tau}{T_1} \qquad \textbf{(17)}$$

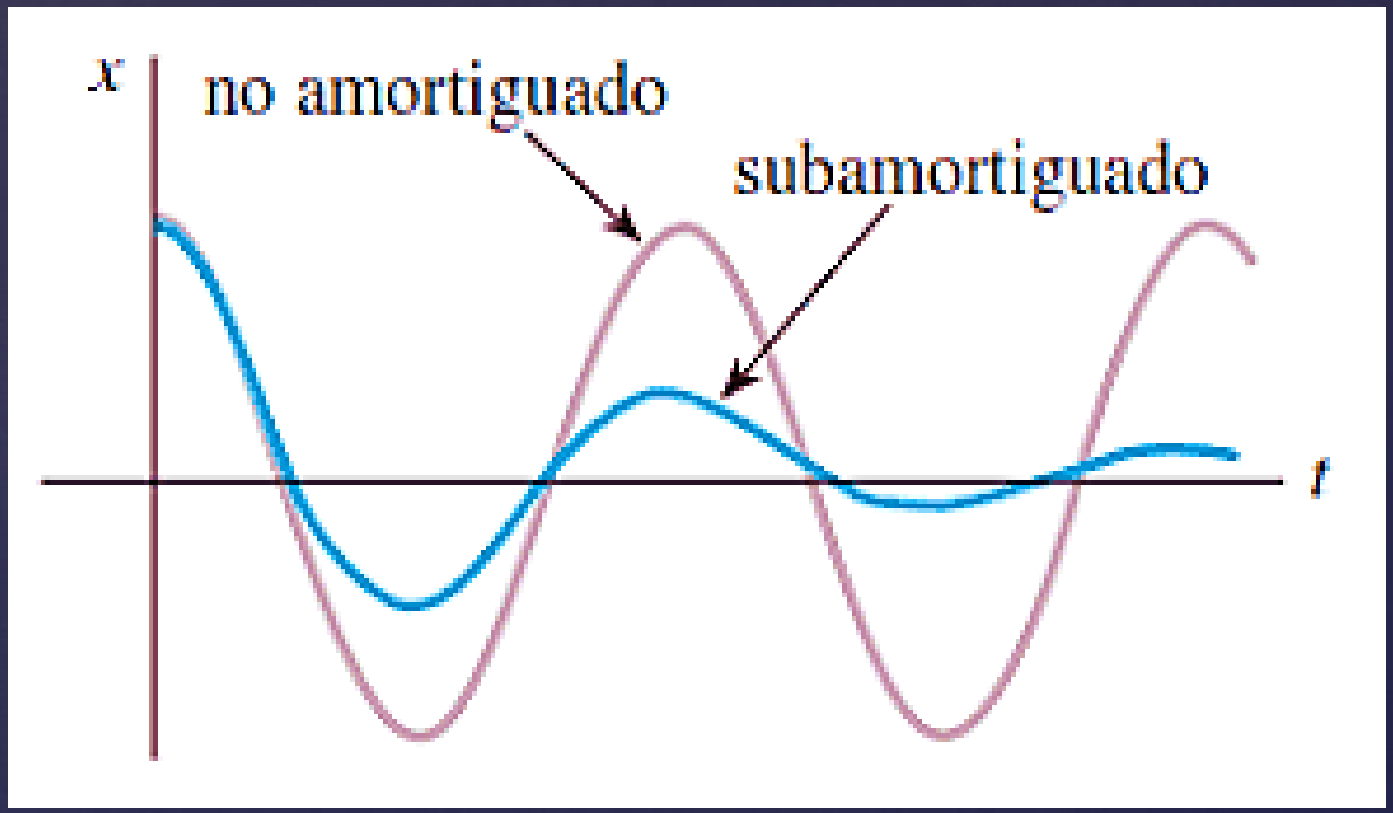
es decir, si el tiempo característico de disipación τ es grande respecto al período de oscilación del sistema T_1, entonces el sistema disipa poca energía en cada ciclo, por lo cual el factor Q resulta grande.

PROBLEMA OPCIONAL

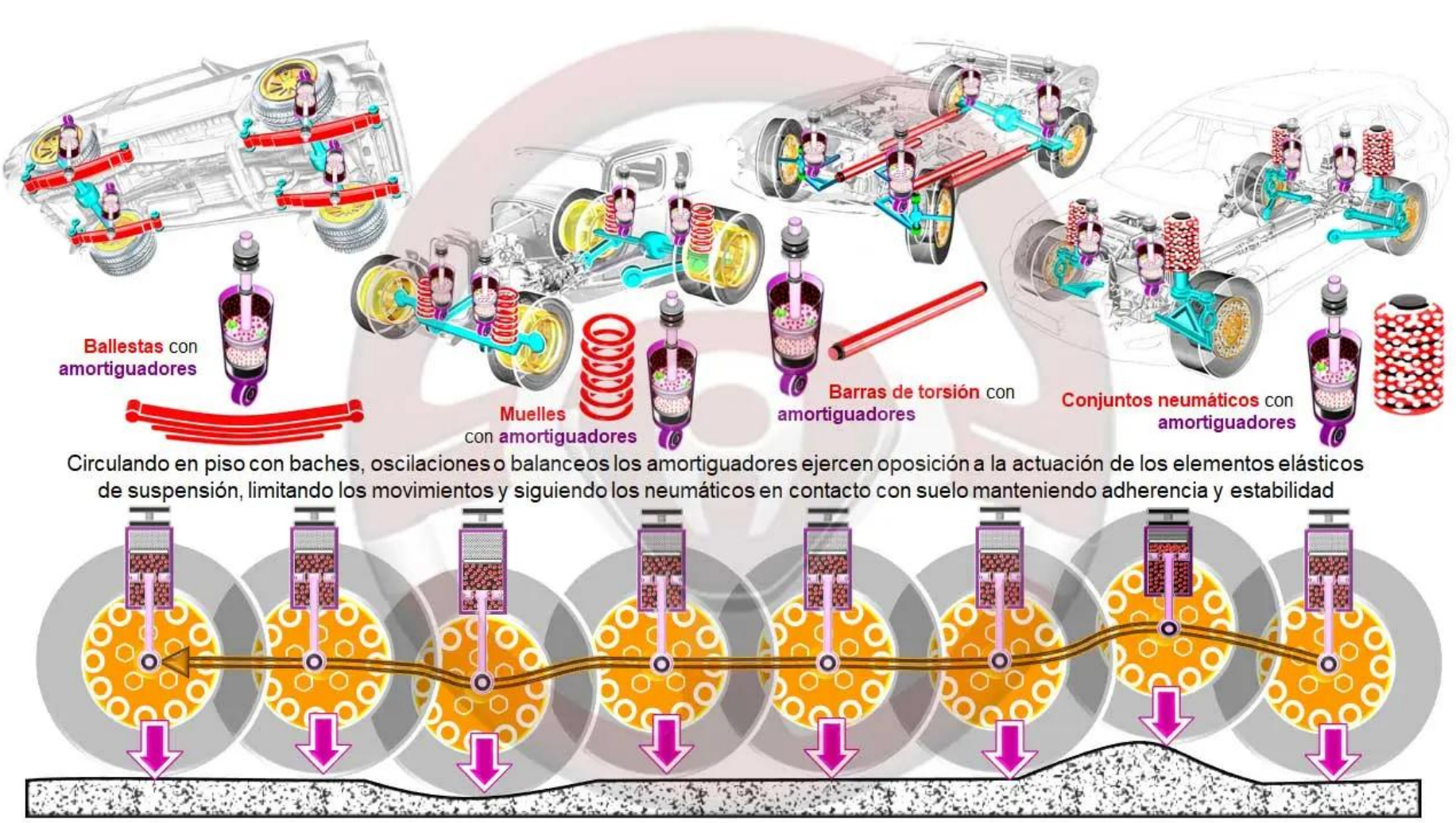
Halle la potencia disipada en función del tiempo, donde,

$$P = \vec{v}.\vec{F}_a = -v^2 b = -v^2 m\Gamma \qquad \textbf{(18)}$$

verifique que la potencia disipada concuerda con $P = \frac{dE}{dt}$ ya que, en el modelo, no hay otra forma en que se pierda o gane energía.


x
no amortiguado
subamortiguado
t

CASO 2: Oscilador críticamente amortiguado



Oscilador críticamente amortiguado

Segundo Caso. Sistema críticamente amortiguado. La solución de la ecuación diferencial **3** es oscilatoria mientras que el amortiguamiento resulta pequeño ($\Gamma < 2\omega_0$). Si el valor de la constante Γ crece suficientemente, hasta un valor crítico, ya no se producen oscilaciones. Ese valor crítico es aquel en donde se satisface que,

$$\omega_1^{\,2} = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 = 0 \qquad \textbf{(19)}$$

es decir,

$$\boxed{\Gamma_{crítico} = 2\omega_0} \qquad \textbf{(20)}$$

resultando $\omega_1 = 0$ ("T_1 infinito"), por lo cual, el sistema no oscila.

En estas condiciones la función $\Psi_1(t) = A_1\, e^{-\Gamma\, t/2}\, \cos\left(\omega_1 t + \delta_1\right)$ (ec. **6**) ya no es la solución más general de la ecuación diferencial **3.**

Es posible demostrar que la solución general de la ecuación diferencial **3** para el caso de un ***sistema críticamente amortiguado*** es (verifique reemplazando en **3**):

$$\boxed{\Psi_1(t) = e^{-\Gamma\, t/2}\, [B\, t + C]} \qquad \textbf{(21)}$$

donde B y C son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Claramente la función **21** no representa a un sistema oscilando. Para fijar ideas resulta conveniente plantear un ejemplo y graficarlo,

a) Sabiendo que inicialmente la masa parte del reposo desplazada de la posición de equilibrio en $5cm$, halle la ecuación de movimiento $\Psi_1(t)$.

Resp. $\Psi_1(t) = e^{-\Gamma\, t/2}\, [B\, t + C]$ *con* $\Gamma = 40\,{}^{1}\!/_{seg}$, $C = 5cm$ *y* $B = 100\,{}^{cm}\!/_{seg}$

Oscilador críticamente amortiguado

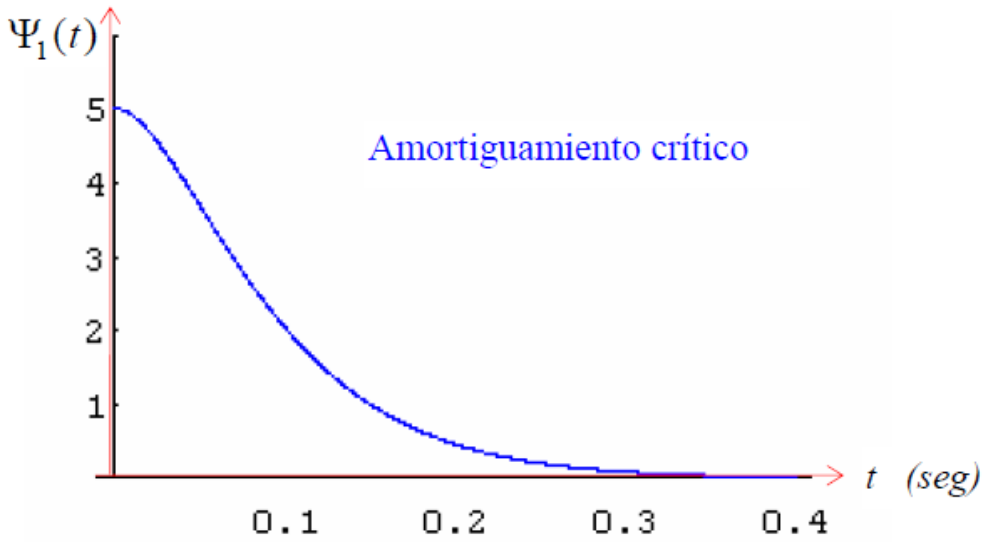


Figura 3: Gráfica de la función $\Psi_1(t) = e^{-\Gamma t/2}\,[B\,t + C]$ (amortiguamiento crítico), para el caso particular en que la masa se halla inicilamente desplazada y en reposo.

Pareciera como si el sistema comenzara a evolucionar oscilatoriamente, pero rápidamente se relaja hacia su posición de equilibrio $\Psi_1 = 0$.

Oscilador críticamente amortiguado

Comentario: El sistema cuando posee amortiguamiento crítico relaja a su posición de equilibrio más rápidamente que en cualquier otra situación. Si aumenta el amortiguamiento por sobre el crítico, en lugar de disminuir el tiempo necesario para lograr el equilibrio, éste aumenta (ver el tercer caso). Por esta razón los amortiguadores en máquinas y vehículos se diseñan de tal forma de que el amortiguamiento esté lo más cercano posible a su valor crítico.

El **objetivo de la suspensión** es mantener **contacto entre neumáticos y suelo**, si al trabajar la suspensión **hay rebotes de ruedas no es** posible

1. En baches ...

... las ruedas suben o bajan y rebotan tras superar los baches y la carrocería tiene repetidos movimientos verticales hasta recuperar el equilibrio en llano

2. En frenadas o aceleraciones ...

... se producen inclinaciones longitudinales que se repiten en sentidos opuestos hasta recuperar el equilibrio al dejar de acelerar o frenar

3. En curvas ...

... se producen inclinaciones transversales con efectos de rebote en sentidos opuestos hasta recuperar el equilibrio con el volante recto

CASO 3: Oscilador sobreamortiguado

Tercer Caso. Sistema sobreamortiguado. Si el coeficiente de amortiguamiento Γ sigue creciendo más halla de su valor crítico,

$$\Gamma > \Gamma_{\text{crítico}} = 2\omega_0, \qquad \textbf{(22)}$$

se cumple que,

$$\omega_1{}^2 = \omega_0{}^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2 < 0 \qquad \textbf{(23)}$$

Por supuesto ningún número real al cuadrado puede resultar negativo, por lo cual la ecuación **6** tampoco nos sirve en este caso. Pero si es posible pensar que ω_1 es un número imaginario y ver sí de esta forma resulta posible rescatar la ecuación **6.** Siguiendo este camino, la función coseno se transforma en un coseno hiperbólico, este paso matemático resulta un poco engorroso, por lo cual, no lo haremos aquí. Simplemente afirmamos que la solución general para un sistema sobreamortiguado es:

$$\Psi_1(t) = e^{-\Gamma t/2}\left[A\, e^{\omega_1' t} + B\, e^{-\omega_1' t}\right] \qquad \textbf{(24)}$$

donde hemos definido (comparar con **23**)

$$\omega_1' = \left|\, \omega_1 \,\right| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}\,, \qquad \textbf{(25)}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales. Claramente ésta solución no resulta oscilatoria.

Oscilador sobreamortiguado

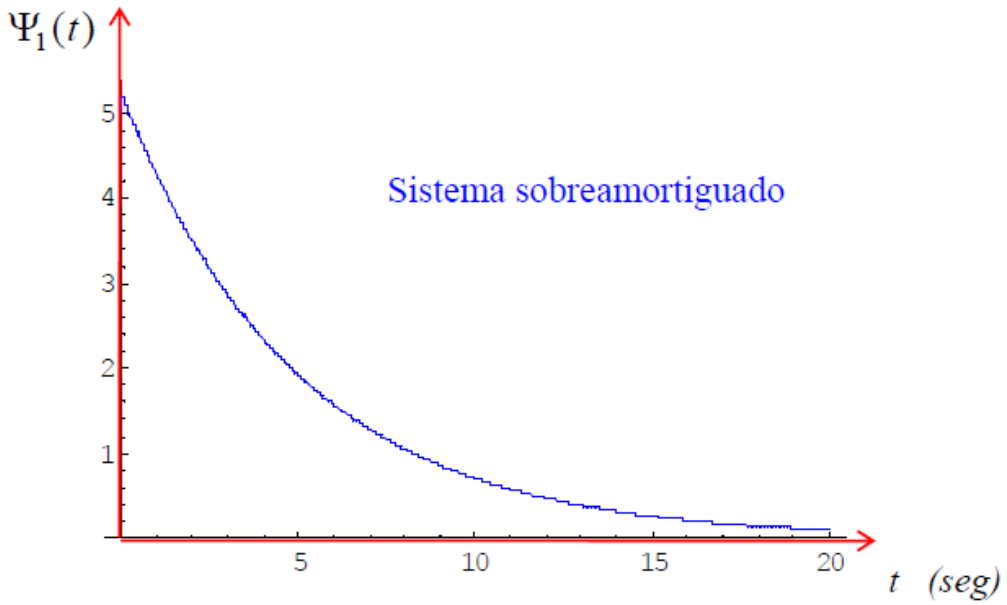
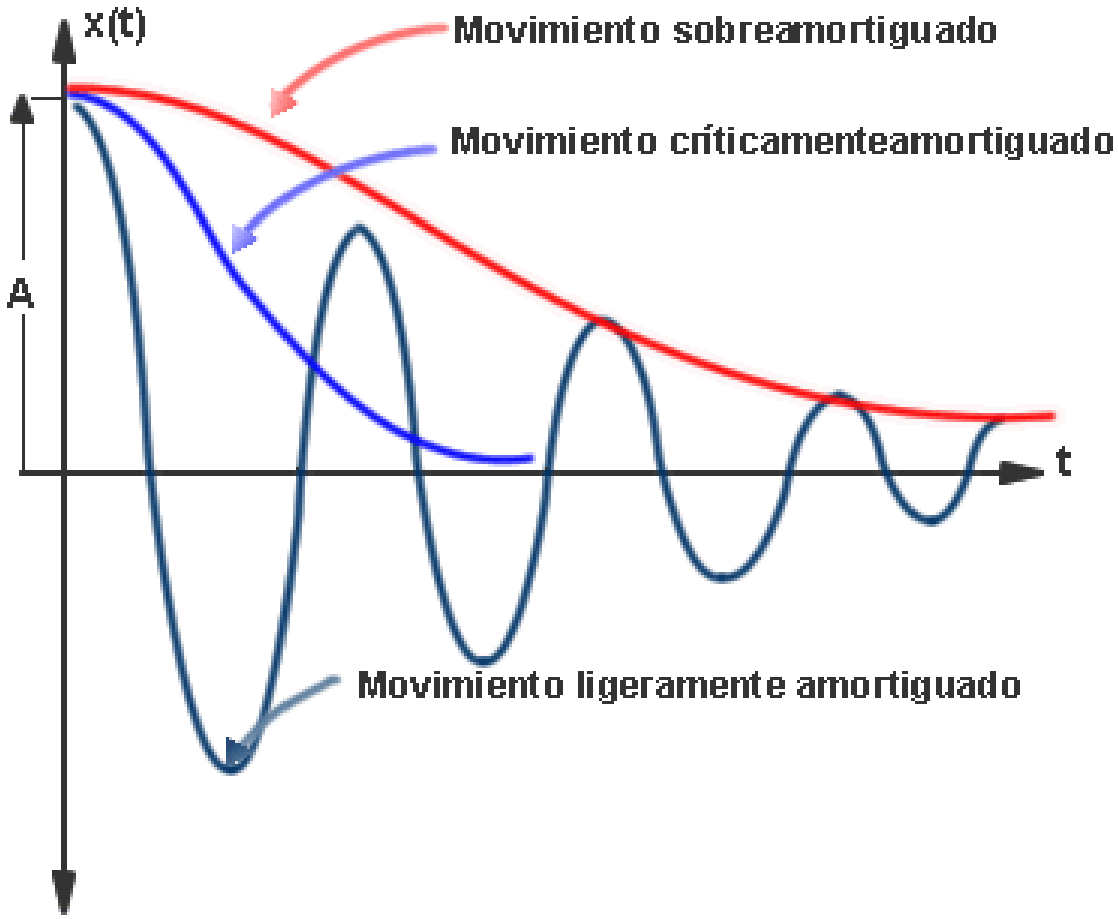
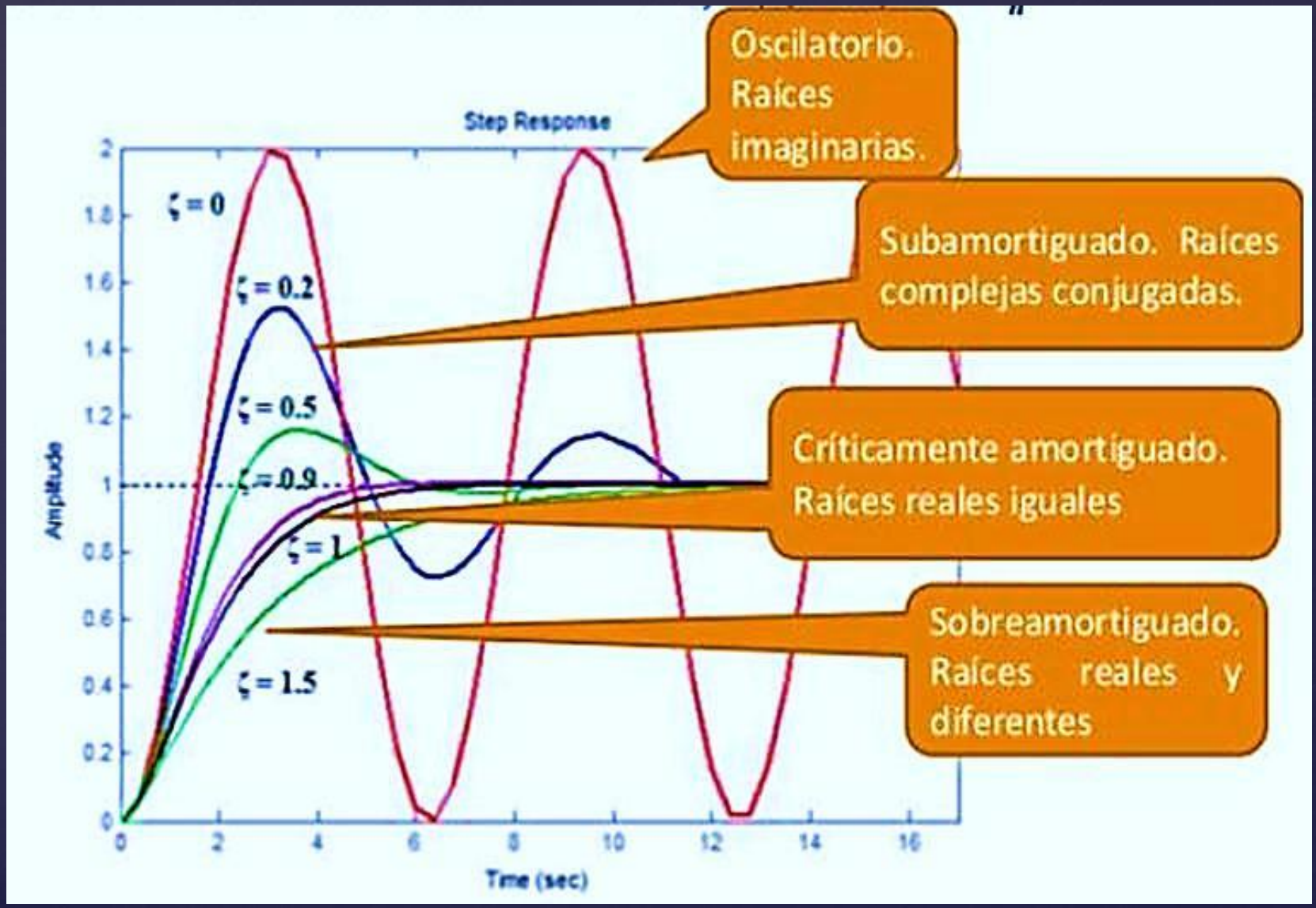


Figura 4: Gráfica de la función $\Psi_1(t) = e^{-\Gamma t/2}\left[A\, e^{\omega_1' t} + B\, e^{-\omega_1' t}\right]$ (Sistema sobreamortiguado).

Observe que el sistema demora mucho más tiempo, en relajarse a su posición de equilibrio, de lo que demora cuando el sistema posee amortiguamiento crítico.



Oscilaciones amortiguadas


Step Response
Amplitude
Time (sec)
ζ = 0
ζ = 0.2
ζ = 0.5
ζ = 0.9
ζ = 1
ζ = 1.5
Oscilatorio. Raíces imaginarias.
Subamortiguado. Raíces complejas conjugadas.
Críticamente amortiguado. Raíces reales iguales
Sobreamortiguado. Raíces reales y diferentes

FIN

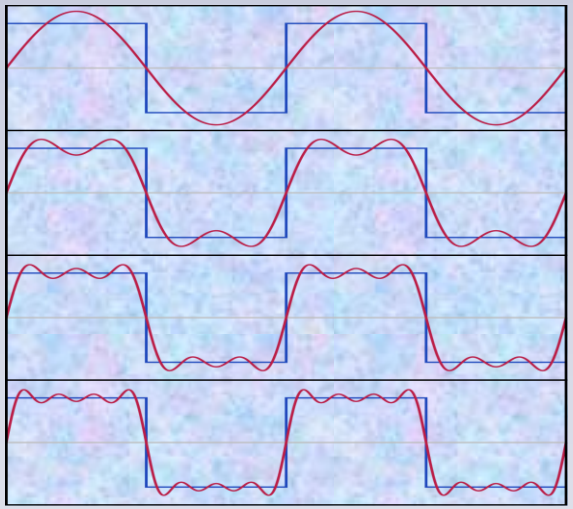
ANEXO 2

MECÁNICA VECTORIAL

OSCILACIONES Y ONDAS

2.1 TEMAS SELECTOS

Texto de:
Domingo Alcaraz Candela



Física + Matemáticas en Acción

Facultad de Ciencias

Dr. Alejandro Valderrama

Series de Fourier

Las series de Fourier son series de términos coseno y seno y surgen en la tarea práctica de representar funciones periódicas generales. Como aplicación constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

La teoría de las series de Fourier es bastante complicada, pero la aplicación de estas series es simple. Las series de Fourier son, en cierto sentido, más universales que las series de Taylor, ya que muchas funciones periódicas discontinuas pueden desarrollarse en serie de Fourier, pero, desde luego, no tienen representaciones en serie de Taylor.

La introducción de las series de Fourier (y de las integrales de Fourier) fue uno de los mayores avances jamás realizados en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería, ya que las series de Fourier (y las integrales de Fourier) son probablemente la herramienta más importante en la solución de problemas con valores en la frontera.

Series trigonométricas

Diremos que una función $f(t)$ es periódica, o p–periódica, si está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y si existe $p > 0$, tal que

$$f(t+p) = f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Al número p lo llamaremos periodo de $f(t)$. La gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p.

Ejemplo 1 *Las funciones* $\operatorname{sin} t$ *y* $\cos t$ *son funciones periódicas de periodo* 2π. *Las funciones constantes son funciones periódicas de cualquier periodo (en el sentido de la definición).*

Ejemplo de funciones que no son periódicas son t, t^2, e^t *y* $\ln t$.

Series trigonométricas

Si $f(t)$ y $g(t)$ tienen periodo p, entonces la función

$$h(t) = af(t) + bg(t)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, también tiene periodo p. Por (2.1) se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

$$f(t + np) = f(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

por tanto,

$$p, 2p, 3p, ...$$

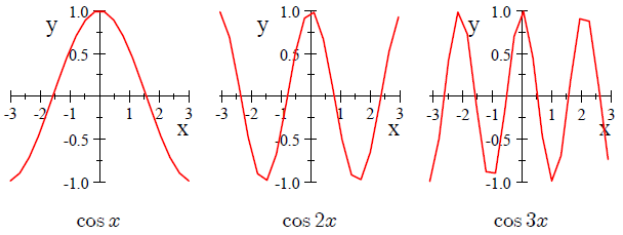
también son periodos[1] de $f(t)$.

El problema principal de este capítulo será la representación de varias funciones de periodo $p = 2\pi$ en términos de las funciones simples, de periodo 2π,

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), ..., \cos(nt), \sin(nt), ...\}$$

llamado **sistema trigonométrico**.

Si una función periódica $f(t)$ tiene un periodo $p > 0$ que es el más pequeño de todos, este se denomina el periodo primitivo de $f(t)$. Por ejemplo, el periodo primitivo de $\sin t$ es 2π y el periodo primitivo de $\sin(2t)$ es π. Una función periódica sin periodo primitivo es $f \equiv const.$



$\cos x$ $\cos 2x$ $\cos 3x$

Series trigonométricas

El sistema trigonométrico

$$1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), ..., \cos(nt), \sin(nt), ...$$

es **ortogonal** en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (y, en consecuencia, en cualquier intervalo de longitud 2π, debido a la periodicidad).

Por definición esto significa que la integral del producto[2] de cualesquiera dos de estas funciones diferentes sobre dicho intervalo es cero, es decir, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos(nt)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(nt)\, dt = 0 \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt)\, dt = 0 \tag{2.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ \pi & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ \pi & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.5}$$

[2] Recordar que

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Series trigonométricas

Las series que surgirán serán de la forma

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{2.6}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ son constantes reales. Estas series se llaman **series trigonométricas**[3] y a los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se les llama **coeficientes de la serie**.

Cada término de la serie (2.6) tiene periodo 2π. Por tanto si la serie (2.6) converge, su suma será una función de periodo 2π.

[3] Recordar que cualquier situación en la que está involucrada una serie funcional su convergencia requiere preocuparse por el comportamiento de sus sumas parciales

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier

Supongamos que $f(t)$ es una función periódica de periodo 2π que puede representarse por una serie trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right), \qquad (2.7)$$

es decir, se supone que esta serie converge y que tiene a $f(t)$ como su suma. Dada una función $f(t)$ como esta, quieren determinarse los coeficientes a_n y b_n de la serie trigonométrica correspondiente.

Determinemos a_0.

Al integrar ambos miembros de (2.7) se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)\right] dt.$$

Fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier

Si es posible realizar la integración término a término de la serie[4], se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\ dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\ dt\right).$$

Claramente el primer término del segundo miembro

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi a_0.$$

Además sabemos de (2.2) que las integrales del segundo miembro son cero. Consecuentemente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = a_0\pi,$$

es decir,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$$

[4] La idea consiste en suponer que la serie es uniformemente convergente, lo que permite integrar término a término.

Fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier

Determinemos ahora $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$

Multipliquemos (2.7) por $\cos(mt)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$, e integremos de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))\right)\cos(mt)\,dt$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\;dt$$
$$+_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\;dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\cos(mt)\,dt\right).$$

Sabemos de (2.2) que la primera integral es cero. Además de (2.4)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\;dt = a_m\pi$$

y de (2.3)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\cos(mt)\;dt = 0.$$

Fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier

Consecuentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\ dt = a_m\pi$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

Para determinar $b_1, b_2, \ldots$ se razona de manera análoga a lo anterior pero ahora multiplicando (2.7) por $\sin(mt)$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$

Al escribir n en lugar de m, se obtienen las llamadas **fórmulas de Euler**

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \text{ para todo } n > 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Los números dados por (2.8) se denominan **coeficientes de Fourier** de $f(t)$. La serie trigonométrica

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right) \tag{2.9}$$

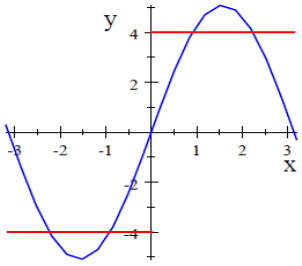
con coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dados por (2.8) se denomina **serie de Fourier de** $f(t)$ (sin atender la convergencia, ésta la discutiremos más adelante)

EJEMPLO: Onda Cuadrada

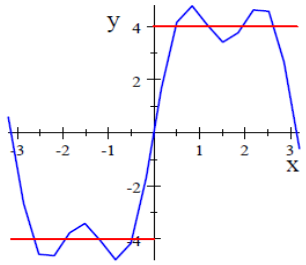
Determinar los coeficientes de Fourier de la función[5]

$$f(t) = \begin{cases} -k & \text{si} \quad -\pi \leq t < 0, \\ \\ k & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

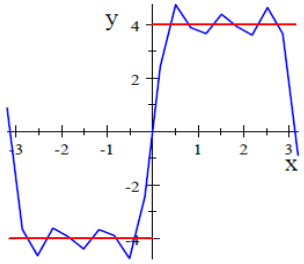
Las gráficas de las cuatro primeras sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{4}$ de la Serie de Fourier de esta serie son



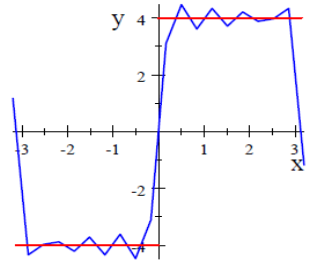
$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \operatorname{sen} x$$



$$S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right)$$



$$S_3 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\, x$$



$$S_4 = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\, x$$

[5] Funciones de este tipo se presentan como fuerzas externas que actúan sobre sistemas mecánicos, fuerzas electromotrices en circuitos eléctricos, etc (el valor de $f(t)$ en un sólo punto no afecta la integral, por lo que puede dejarse indefinida $f(t)$ en $t = 0$ y $t = \pm\pi$)

Convergencia de la serie de Fourier

Supongamos que $f(t)$ es cualquier función periódica dada de periodo 2π para la que existen las integrales de (2.8); por ejemplo, $f(t)$ es continua o tan sólo continua a trozos. Entonces pueden calcularse los coeficientes de Fourier (2.8) de $f(t)$ y utilizarlos para formar la serie de Fourier (2.9) de $f(t)$. Sería muy conveniente que la serie así obtenida convergiera y tuviera la suma[6] $f(t)$. La mayoría de las funciones que se presentan en las aplicaciones son tales que esto se cumple (salvo en los saltos de $f(t)$, los cuales discutiremos a continuación). En este caso, cuando la serie de Fourier $S(t)$ de $f(t)$ representa a $f(t)$, se escribe

$$f(t) = S(t)$$

con un signo de igualdad. Si la serie de Fourier de $f(t)$ no tiene la suma $f(t)$ o no converge, escribiremos

$$f(t) \sim S(t)$$

con una tilde $\sim$, lo que indica que la serie trigonométrica del segundo miembro tiene los coeficientes de Fourier de $f(t)$ como coeficientes[7], por lo que se trata de la serie de Fourier de $f(t)$.

[6] Pero no siempre ocurre así, pues existen muchas funciones integrables e incluso continuas, cuya serie de fourier converge en uno o más puntos.

[7] Empezaremos por poner de manifiesto que la serie de Fourier de una función integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ no está determinada biunívocamente por la función. Por ejemplo, dos funciones que coinciden en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$, salvo en un número finito de puntos, definen la misma serie de Fourier.

Convergencia de la serie de Fourier

El siguiente paso es plantear el problema de la convergencia de la serie de Fourier: hasta qué punto la serie de Fourier de una función es una representación válida de la misma. Nuestro propósito es presentar de manera adecuada un conjunto de condiciones que garanticen que la serie de Fourier de una función no solamente converja, sino que además *converja* a la función considerada.

Teorema 2.2.1 *Condición suficiente de convergencia puntual de una serie de Fourier*

Sea $f(t)$ una función 2π-periódica[8]*, continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi[$ y que tiene derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de dicho intervalo. Entonces la serie de Fourier de $f(t)$ converge y su suma*[9] *es*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

[8] Por tanto al considerar series de Fourier, asumiremos que la función f está definida en el intervalo $-\pi \leq t < \pi$ (o bien en el intervalo $-\pi < t \leq \pi$) y que para los otros valores de la variable t, f viene determinada por la condición

$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

[9] Observar que si $f(t)$ es continua en t_0, entonces $f(t_0^-) = f(t_0^+) = f(t_0)$ y la serie de Fourier converge a $f(t_0)$ ya que

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \frac{f(t_0) + f(t_0)}{2} = f(t_0).$$

EJEMPLO: Onda Cuadrada

La onda cuadrada del Ejemplo 2 tiene un salto en $t_0 = 0$. *En este punto su límite por la izquierda es* $-k$ *y su límite por la derecha es* k, *por lo que el promedio de estos límites es* 0. *La serie de Fourier de la onda cuadrada converge en realidad a este valor cuando* $t = 0$ *ya que entonces todos sus términos son cero. Se procede de manera similar para los otros saltos. (Esto concuerda con el Teorema 2.2.1)*

Otras formas de las series de Fourier

La forma canónica de las series de Fourier es la que hemos estado utilizando hasta el momento, donde la función en cuestión estaba definida sobre el intervalo $[-\pi, \pi[$,

2.3.1. Serie de Fourier para una función de periodo $2L$

En muchas ocasiones es deseable adaptar la forma de una serie de Fourier a funciones periódicas de periodo $p = 2L > 0$ en el intervalo $[-L, L[$. Esto se consigue gracias a un cambio de variable.

Sea $f(t)$ una función periódica de periodo $2L$. Para desarrollar en serie de Fourier en $[-L, L[$ hacemos un cambio de variable, poniendo

$$\frac{t}{x} = \frac{L}{\pi},$$

entonces

$$f(t) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

Si definimos

$$g(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

claramente la función g es una función periódica de x de periodo 2π ya que

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) = g(x).$$

Otras formas de las series de Fourier

De esta forma si el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(x)$ es

$$g(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \qquad (2.10)$$

con coeficientes de Fourier

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\ dx \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\ dx \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}} \qquad (2.11)$$

entonces, como $x = \frac{\pi}{L}t$ sustituyendo en (2.10) y (2.11) se obtiene

$$g\left(\frac{\pi}{L}t\right) = f\left(\frac{L}{\pi}\frac{\pi}{L}t\right) = f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right),$$

y

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\ dt \text{ para todo } n \geq 0. \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\ dt \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}} \qquad (2.12)$$

Otras formas de las series de Fourier

Generalmente se escribe $w_0 = \frac{\pi}{L}$, y por lo tanto,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t) \right),$$

con

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos(n w_0 t) \; dt \text{ para todo } n \geq 0.$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(n w_0 t) \; dt \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

EJEMPLO: Onda Cuadrada

Determinar la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -2 < t < -1 \\ k & si \quad -1 < t < 1 \\ 0 & si \quad 1 < t < 2 \end{cases} \qquad con\ p = 2L = 4,\ L = 2.$$

Series de Fourier de funciones pares e impares

A continuación pasamos a considerar el desarrollo en serie trigonométrica de funciones pares e impares. En principio los conceptos desarrollados hasta ahora podrían haberse realizado en cualquier intervalo de longitud 2π. No obstante, el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$ tienen importantes ventajas a la hora de aprovechar las propiedades simétricas de las funciones.

Recordemos que una función $g(t)$, definida en un intervalo $[-L, L]$ con $L > 0$, es una **función par**[10] si $g(-t) = g(t)$ para todo $t \in [-L, L]$. Diremos que h es una **función impar**[11] si $h(-t) = -h(t)$ para todo $t \in [-L, L]$.

Las funciones $\cos(nt)$ son pares y las funciones $\sin(nt)$ son impares. También sabemos que si g es par, entonces

$$\int_{-L}^{L} g(t)\ dt = 2\int_{0}^{L} g(t)\ dt.$$

y si h es impar, entonces

$$\int_{-L}^{L} h(t)\ dt = 0.$$

Además es obvio que el producto $q = gh$ de una función par g y una función impar h es impar, ya que

$$q(-t) = -q(t).$$

Consecuentemente, si $f(t)$ es par, entonces el integrando $f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ en (2.12) es impar, y $b_n = 0$. De manera similar, si $f(t)$ es impar, entonces $f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ en (2.12) es impar, y $a_n = 0$.

[10] La gráfica de esta función es simétrica con respecto al eje OY.
[11] la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas

Series de Fourier de funciones pares e impares

Teorema 2.3.1 *Serie de Fourier de funciones pares e impares*

Sea f una función $2L$-periódica integrable de Riemann en $[-L, L]$.

(i) Si f es par la serie de Fourier de f es una serie de Fourier de cosenos

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \tag{2.13}$$

donde los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ se determinan a partir de la función f según las fórmulas

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos(nt)\ dt \text{ para todo } n \geq 0 \tag{2.14}$$

Series de Fourier de funciones pares e impares

(ii) Si f es impar la serie de Fourier de f es una serie de Fourier de senos

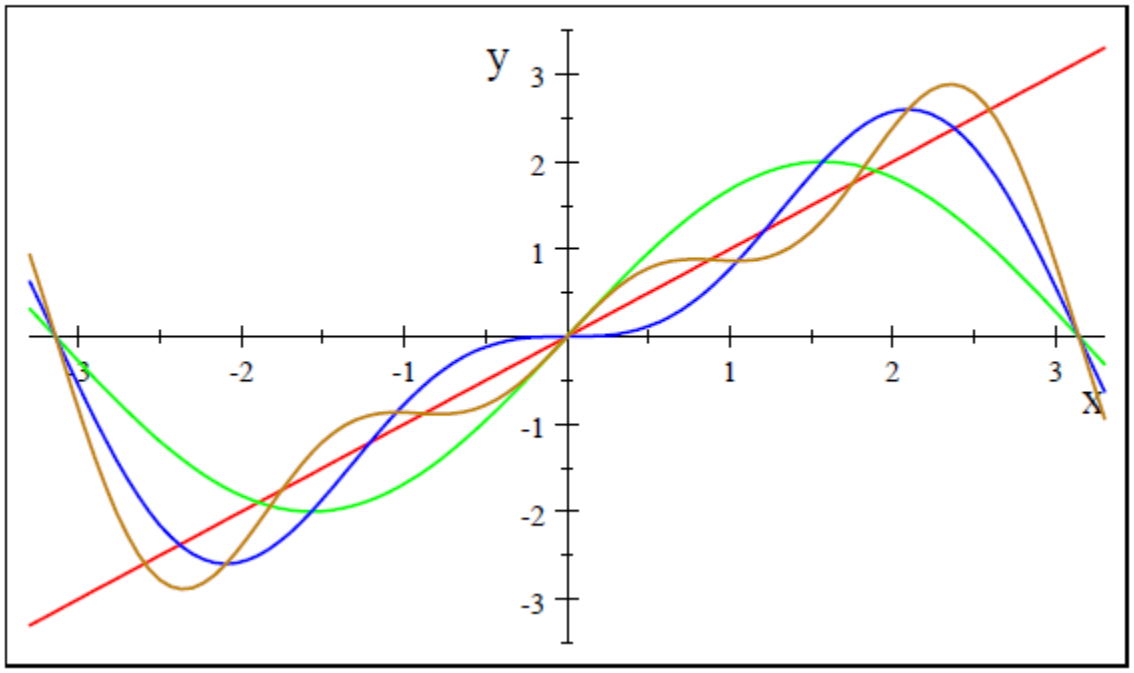
$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \qquad (2.15)$$

cuyos coeficientes $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se determinan a partir de la función f según las fórmulas

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t\, dt \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots \qquad (2.16)$$

EJEMPLO:

Obtener la serie de Fourier de la función $f_1(t) = t$ *en* $[-\pi, \pi[$.



Series de Fourier de funciones pares e impares

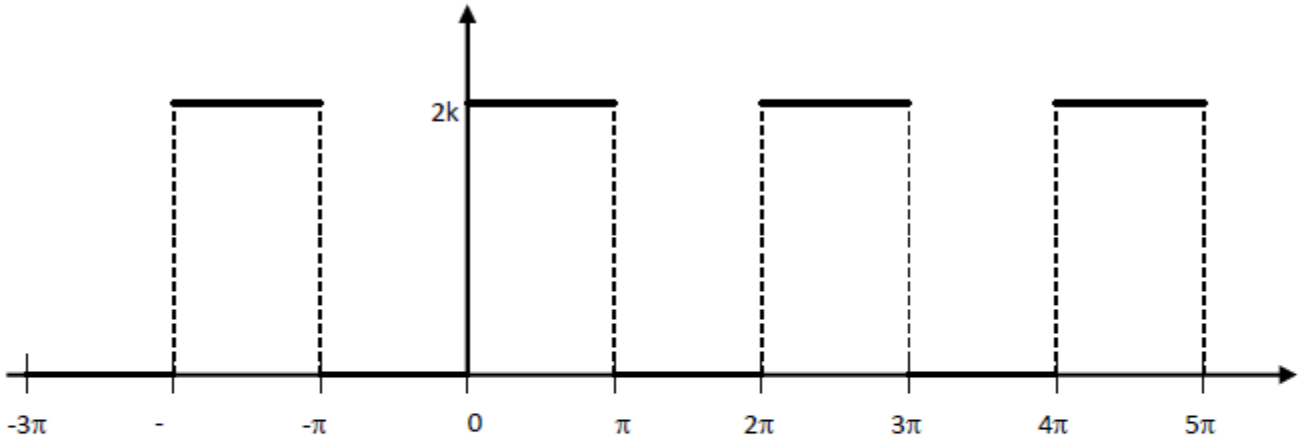
Teorema 2.3.2 *Suma de funciones*

Los coeficientes de Fourier de una suma $f_1 + f_2$ *son las sumas de los coeficientes de Fourier de* f_1 *y* f_2 *correspondientes.*

Los coeficientes de Fourier de αf *son el producto de* α *y los coeficientes de Fourier de* f *correspondientes.*

EJEMPLO: Pulso rectangular

La función $f^*(t)$ *de la siguiente gráfica*



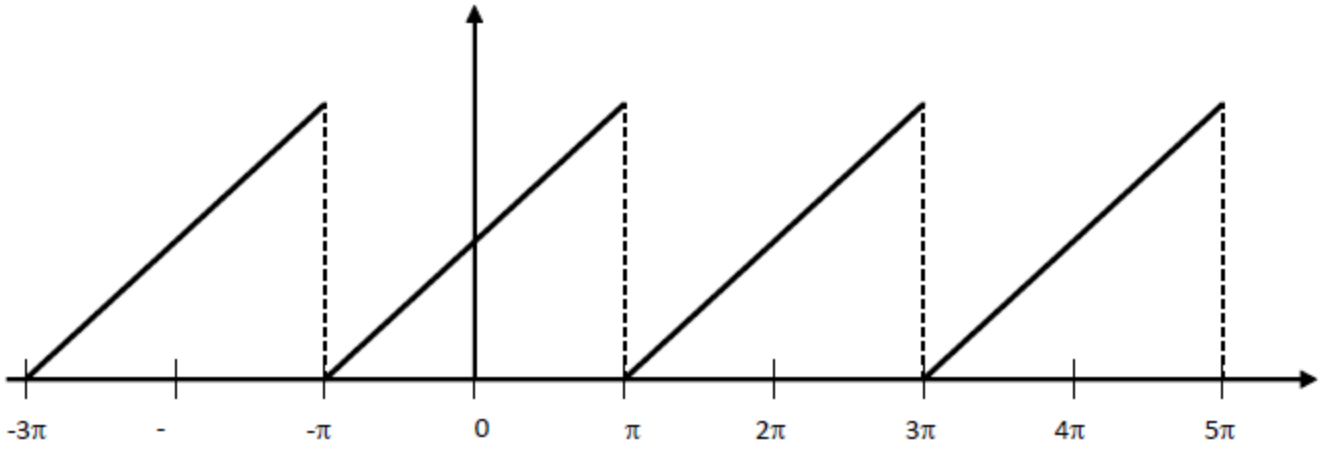
es la suma de la función $f(t)$ *del Ejemplo 2 y la constante* k*. Por tanto, a partir de dicho ejemplo y del Teorema 2.3.2 se concluye que*

$$f^*(t) = k + \frac{4k}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \ldots\right).$$

EJEMPLO: Onda diente de sierra

Determinar la serie de Fourier de la función

$$g(t) = t + \pi \ si \ -\pi \leq t < \pi \qquad y \qquad f(t + 2\pi) = f(t) .$$



FIN